ALLES ZÄHLT!

MATHE IM KITA-ALLTAG

BEGLEITHEFT

WISSENSCHAFTLICHER HINTERGRUND

IBBW Institut für Bildungsanalysen Baden-Württemberg

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

ALLES ZÄHLT!

MATHE IM KITA-ALLTAG

BEGLEITHEFT

Wissenschaftlicher Hintergrund für Fachkräfte, Multiplikatorinnen und Multiplikatoren im kindheitspädagogischen Arbeitsfeld

IBBW
Institut für Bildungsanalysen Baden-Württemberg

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

IMPRESSUM

Herausgeber	Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg Thouretstraße 6, 70173 Stuttgart
Redaktion	Dr. Lucia Teuscher und Anja Bereznai, Institut für Bildungsanalysen Baden-Württemberg
Verantwortlich	Ilse Petilliot-Becker, Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

AN DER ERSTELLUNG DER BEITRÄGE HABEN MITGEWIRKT:

Das Projekt-Team ALLES ZÄHLT!
Anja Bereznai, Institut für Bildungsanalysen Baden-Württemberg
Jana Bernhard, Lehrerin
Martina Hofheinz, Institut für Bildungsanalysen Baden-Württemberg
Philip Mohila, freier Mitarbeiter
Tina Prinz, freie Mitarbeiterin
Dr. Lucia Teuscher, Institut für Bildungsanalysen Baden-Württemberg
Helene Vollmuth, Lehrerin

Die weiteren Expertinnen und Experten aus Wissenschaft und Praxis
Tina Armbruster, Studierende, Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Annegret Bauer, Sprachfachkraft, Kinder- und Familienhaus Unserer Lieben Frau, Caritasverband für die Erzdiözese Freiburg e.V.
Daniela Bischler, Fachberatung, Stadt Freiburg
Sabine Döhner, Sprachfachkraft, Kindertagesstätte Oststadtpark, Stadt Pforzheim
Lena Ehms, pädagogische Fachkraft, element-i Kinderhaus WiKi Friedrichshafen, Kind und Beruf gGmbH
Evelyn Gierth, Fachberatung Sprachkitas Verbund Freiburg, Caritasverband für die Erzdiözese Freiburg e. V.
Jana Helmholz, pädagogische Fachkraft, element-i Kinderhaus Sterngucker Karlsruhe, Familie und Beruf gGmbH
Ann-Kathrin Kühner, Leitung, Kita KinderUniversum, educcare gGmbH
Lisa-Marie Lange, pädagogische Fachkraft, element-i Kinderhaus Sterngucker Karlsruhe, Familie und Beruf gGmbH
Alisa Merkel, Studierende, Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Prof. Dr. Susanne Roux (†), Wissenschaftlerin, Pädagogische Hochschule Weingarten
Erika Schreck, Leitung, Kindertagesstätte am See, Gemeinde Großbettlingen
Jil Winandy, Studierende, Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Prof. Dr. Gerald Wittmann, Wissenschaftler, Pädagogische Hochschule Freiburg
Cornelia Wolff, Fachberatung, Stadt Pforzheim

Die Kinder und pädagogischen Fachkräfte aus folgenden Einrichtungen
element-i Kinderhaus Wiki, Kind und Beruf gGmbH
element-i Kinderhaus Sterngucker, Familie und Beruf gGmbH

Layout und Satz:	Philip Mohila, Karlsruhe
Lektorat:	Brigitte Kieser, Osterburken
Druck:	Go Druck Media, Kirchheim unter Teck

Erschienen im Februar 2022

INHALT

VORWORT

MATHEMATIK IN DER KITA – WIESO, WESHALB, WARUM?

Sehr geehrte Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter in Kindertageseinrichtungen,

es ist mittlerweile beinahe selbstverständlich, dass Kinder eine Kindertageseinrichtung besuchen. Zugleich steigt die kulturelle Vielfalt und soziale Unterschiede nehmen zu. Umso wichtiger wird der Bildungsauftrag der Kitas und die Aufgabe der pädagogischen Fachkräfte, die Kinder bei der Entwicklung ihrer Persönlichkeit und Lernfähigkeit zu unterstützen. All dies muss unter Berücksichtigung der individuellen Fähigkeiten der Kinder, ihres Bildungsstandes und der Lebenssituation der Familien stattfinden. So haben sich in den letzten Jahren die Kindertagesstätten als Bildungsstätten etabliert, in denen das Fundament für die sozialen und kognitiven Kompetenzen gelegt wird, die für alle weiteren Bildungsprozesse, für Bildungsoffenheit und Bildungsmotivation, notwendig sind (Viernickel, 2017). So wurde die alltägliche pädagogische Praxis in den letzten Jahren überdacht, indem Bildungs- und Orientierungspläne als Rahmencurricula für die Länder entwickelt und angewandt wurden.

Mathematische Bildung – So früh?

Für die Kinder bedeutet Bildung allgemein einen vielfältigen Zugang zur Welt zu entwickeln, dabei soziale Beziehungen einzugehen und eine Lebens- und Selbsterfahrung aufzubauen (Schäfer, 2011). Deshalb gehört auch die mathematische Bildung zum Bildungsauftrag der Kindertageseinrichtungen, denn einfache mathematische Verhältnisse gehören ja schon zur Spiel- und Sozialumgebung des Kindes. Mathematische Kompetenzen werden daher am besten vermittelt, indem mathematische Zusammenhänge in die Selbsttätigkeit und die Selbsterkenntnis der Kinder eingeführt und in die spielerische Auseinandersetzung mit der Umwelt aufgenommen werden. Das Interesse der Kinder an der gegenständlichen Welt kommt sehr früh zum Ausdruck, indem sie Objekte sortieren, der Größe nach ordnen, zu zählen beginnen oder erste, oft spiegelverkehrte Zahlen schreiben. Wissenschaftliche Studien zur frühen Beschäftigung mit mathematischem Basiswissen machen deutlich, dass mathematische Förderprogramme, die direkt an der Didaktik des Schulunterrichts orientiert sind, keine dauerhaften Wirkungen beim Übergang in die Grundschule zeigen (Krajewski, Nieding & Schneider 2008). Der Lerneffekt ist also von kurzfristiger Dauer.

Auch bei mathematischen Bildungsprozessen von Kindern ist die Rolle der pädagogischen Fachkräfte von entscheidender Bedeutung. Sie können den Kindern eine systematische und nachhaltige Anregung und Begleitung bieten. Das Material von **ALLES ZÄHLT!** besteht aus einem Begleitheft zum theoretischen Hintergrund sowie aus einem Praxisheft und Impulskarten, die eine methodisch-didaktische Hilfe für den pädagogischen Alltag darstellen. Die wissenschaftlich aufbereiteten Materialien in Form von Heften und Impulskarten sind sehr anschaulich gestaltet und leicht in der Handhabung. Sie regen durch eine abwechslungsreiche methodische Vielfalt dazu an, mit den Kindern auf eine spielerische Weise die Welt der Mathematik mit all ihren spannenden Facetten zu entdecken. Hier trägt das methodische Geschick der Erwachsenen wesentlich zum erfolgreichen Lernen bei. Von der Frage, wie Themen und Sachverhalte mit den Kindern bearbeitet werden, hängt häufig ab, ob das Interesse des Kindes, sich weiter mit einem Thema zu beschäftigen, dauerhaft geweckt wird. So kann, anknüpfend an den natürlichen Forschergeist und den Entdeckungseifer der Kinder, die mathematische Bildung in den pädagogischen Alltag eingebunden werden.

Auf diesem Wege wünsche ich Ihnen viel Freude bei der mathematischen Entdeckungsreise mit den Kindern!

Ihre
Prof. Dr. Nataliya Soultanian

1 EINFÜHRUNG
IST „MATHEMATIK“ TEIL DES BILDUNGSAUFTRAGS IN DER KITA?

Kinder interessieren sich in der Regel bereits weit vor dem Schuleintritt für mathematische Themen und Zusammenhänge. Dabei erwerben sie als Akteurinnen und Akteure ihres eigenen Bildungsprozesses grundlegende mathematische Fähigkeiten. Eine professionelle Begleitung früher mathematischer Interessen und Aktivitäten der Kinder ist damit Teil des Bildungsauftrags von Kitas.

Mathematik – ein Thema für die Kita?

In diesem Kapitel wird zunächst die Frage geklärt, ob Mathematik zum Bildungsauftrag einer Kita gehört. Zur Beantwortung dieser Fragestellung wird auf den „Orientierungsplan für Bildung und Erziehung in baden-württembergischen Kindergärten und weiteren Kindertageseinrichtungen“ (Orientierungsplan, Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg 2014) Bezug genommen.

Längst ist klar, dass Bildung nicht erst in der Schule beginnt. Entsprechend haben auch Kindertageseinrichtungen einen gesetzlich verankerten Bildungsauftrag. Sie sind die ersten Institutionen des deutschen Bildungssystems. Es stellt sich daher zunächst die Frage, was genau unter Bildung in der frühen Kindheit zu verstehen ist.

Kinder erschließen sich aktiv ihre Welt

Ausgehend vom „Orientierungsplan für Bildung und Erziehung in baden-württembergischen Kindergärten und weiteren Kindertageseinrichtungen“ ist Bildung ein „aktiver Aufnahme- und Verarbeitungsprozess von Informationen – das Kind ist Akteur, Subjekt, das sich aktiv die Welt erschließt, aneignet und gestaltet.“ (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, Orientierungsplan 2014, S. 23). Dieses Bildungsverständnis liegt nicht nur dem Orientierungsplan zugrunde, sondern entspricht auch allen gängigen pädagogischen Konzepten und Richtungen im Bereich der frühen Kindheit. Der pädagogischen Fachkraft kommt dabei eine wichtige Rolle zu, denn es ist ihre Aufgabe, jedes Kind in seinem Bildungs- und Entwicklungsprozess möglichst optimal zu unterstützen und zu begleiten. Dabei sind nach dem Orientierungsplan (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg 2014, S. 104ff) folgende Fragen handlungsleitend:

- Was **will** das Kind?
- Was **braucht** das Kind?
- Was **kann** das Kind?

Diese Fragestellungen werden im Folgenden auf das Themenfeld Mathematik übertragen.

WAS WILL DAS KIND?

Frühes Interesse für Mathematik

Kinder spielen Würfel- und Brettspiele und zählen dabei. Sie vergleichen Mengen, wenn sie beispielsweise etwas untereinander aufteilen. Sie messen Längen mit unterschiedlichen Hilfsmitteln, bilden Reihenfolgen, experimentieren mit Mustern und Formen, klassifizieren und ordnen Gegenstände … All dies sind zweifelsohne Tätigkeiten, die mathematisches Potenzial aufweisen.

Kinder interessieren sich also oftmals für unterschiedliche Tätigkeiten des mathematischen Bereichs.

WAS BRAUCHT DAS KIND?

Begleitung, Unterstützung und adaptive Förderung

Neben den kindlichen Interessen stellt sich zudem die Frage, was notwendig ist, um dem einzelnen Kind möglichst optimale Voraussetzungen im Hinblick auf Bildungsteilhabe zu ermöglichen.

Kinder brauchen eine professionelle Begleitung durch pädagogische Fachkräfte. Genauer gesagt: Jedes Kind braucht ausgehend von seinen Kompetenzen eine spezifische Unterstützung durch die begleitende pädagogische Fachkraft. Dies entspricht auch der Vorstellung einer „adaptiven Förderung“, nach der Kindern, ausgehend von ihrem individuellen Lern- und Entwicklungsstand, durch gezielte Anregungen die „nächste Stufe der Entwicklung“ eröffnet wird (Bruns 2014).

WAS KANN DAS KIND?

Kenntnis des kindlichen Entwicklungsstands ist essentiell

Um die Kinder bestmöglich begleiten und ihnen die richtige Unterstützung für ihre individuellen Bildungsprozesse geben zu können, ist es entscheidend, ihren jeweiligen Entwicklungsstand einschätzen zu können. Die pädagogische Fachkraft braucht hierfür fachspezifisches Wissen über Entwicklungsstufen und -verläufe sowie Verfahren zur Beobachtung und Dokumentation. Spezifische Grundlagen zur Beobachtung und Dokumentation werden hier nicht thematisiert. Träger und Leitung sollten jedoch dafür Sorge tragen, dass das Kita-Team über ausreichend Fachkompetenz verfügt, um die Entwicklungsphasen und -verläufe von Kindern einschätzen und daran sinnvoll anknüpfen zu können.

Folglich kann festgehalten werden, dass Kinder Tätigkeiten nachgehen, die dem Themenbereich Mathematik zuzuordnen sind („Was will das Kind?“). Der Erwerb früher mathematischer Basiskompetenzen hat zudem einen entscheidenden Einfluss auf die weitere Bildungsbiographie der Kinder. Es gehört damit zu den Aufgaben der pädagogischen Fachkräfte, den Kindern gezielt Anregungen für mathematische Bildungsprozesse zu bieten und bei Bedarf eine spezifische Förderung einzuleiten („Was braucht das Kind?“). Die Grundlage hierfür bildet die Einschätzung des individuellen Entwicklungsstandes der Kinder („Was kann das Kind?“).

Frühe Mathematik? Unbedingt!

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Frage, ob Mathematik zum Bildungsauftrag der Kindertageseinrichtungen gehört, in jedem Fall mit **„Ja“** beantwortet werden kann.

2 FRÜHES MATHEMATIKLERNEN

Gerald Wittmann

FACHWISSENSCHAFTLICHE FUNDIERUNG
Der Erwerb mathematischer Basiskompetenzen gehört zum natürlichen Entwicklungs- und Bildungsprozess von Kindern im Kita-Alter. Zudem weisen wissenschaftliche Erkenntnisse auf die Bedeutsamkeit früher mathematischer Bildungsprozesse für Chancengerechtigkeit und Bildungsteilhabe hin.

In diesem Kapitel werden relevante wissenschaftliche Erkenntnisse in Bezug auf frühe mathematische Bildung dargestellt.

Dass das Mathematiklernen nicht erst mit Schulbeginn anfängt, sondern schon weit vorher, ist mittlerweile Konsens. Im Sinne einer lebenslangen Bildungskette soll es auch in der Kita in angemessener Weise angeregt und unterstützt werden: ausgehend von den Vorerfahrungen und Interessen der Kinder, sachgerecht im Sinne der Elementarmathematik und anschlussfähig an den Mathematikunterricht der Grundschule (vgl. Gasteiger 2017). In diesem Text werden die wissenschaftlichen Grundlagen hierfür zusammengefasst. Er umfasst drei Teile: Zunächst werden die Bedeutung früher mathematischer Bildung und Grundsätze zu ihrer Gestaltung beschrieben (> **2.1**). Den Schwerpunkt bilden sowohl die Zahlbegriffsentwicklung von Kindern als auch die Prinzipien ihrer Förderung in der Kita (> **2.2**). Die Entwicklung weiterer mathematischer Kompetenzen im Kita-Alter mit Ansätzen zur Förderung wird abschließend dargestellt (> **2.3**).

2.1 Bedeutung früher mathematischer Bildung

Mathematische Vorkenntnisse zu Schulbeginn bieten gute Voraussetzungen

Die mathematischen Vorkenntnisse von Kindern am Schulanfang sind ein guter Prädiktor für die späteren Mathematikleistungen in der Grundschule und teilweise sogar in der Sekundarstufe I (Schneider & Krajewski 2006; Weißhaupt, Peucker & Wirtz 2006; Dornheim 2008; Lehrl, Klucniok, Rossbach & Anders 2017). Mit anderen Worten: Kinder, die am Schulanfang über umfangreichere mathematische Vorkenntnisse verfügen als andere, erbringen im statistischen Mittel auch später in der Schule bessere Mathematikleistungen. Die mathematischen Fähigkeiten haben diesbezüglich eine höhere Vorhersagekraft als beispielsweise allgemeine kognitive Fähigkeiten.

Mathematische Interessen und Tätigkeiten der Kinder unterstützen

Hinzu kommt, dass viele Kinder im Kita-Alter schon mathematische Kompetenzen zeigen. Sie entwickeln beiläufig, sei es im Alltag oder in der Familie, mathematische Fähigkeiten: Sie sortieren Objekte aufgrund bestimmter Eigenschaften und ordnen sie der Größe nach, sie legen oder zeichnen geometrische Muster, sie schreiben Ziffern, zählen und bestimmen Anzahlen – und sie wollen diese Fähigkeiten vertiefen. Deshalb sollten pädagogische Fachkräfte derartige Interessen schon in der Kita unterstützen sowie den weiteren Erwerb mathematischer Kompetenzen anregen und begleiten.

Allerdings gibt es auch Kinder, die weder entsprechende Anregungen in ihrem Umfeld erhalten noch offene Angebote im Kindergarten für sich nutzen können. Hier ist eine kompensatorische Förderung sinnvoll, die darauf abzielt, auch diesen Kindern von Beginn an gute Lernvoraussetzungen für den Mathematikunterricht zu ermöglichen (Kammermeyer, Martschinke & Drechsler 2006; Edelmann 2011; Fölling-Albers 2013).

Nachhaltigkeit von Trainingsprogrammen zum Zahlbegriff

Auf welche Weise sollen nun mathematische Kompetenzen im Kita-Alter gefördert werden? Empirische Studien zeigen, dass ein Einsatz von Trainingsprogrammen zum Zahlbegriff im letzten Kindergartenjahr zwar kurzfristig zu einem deutlichen Lernzuwachs am Ende der Kita-Zeit führt, dieser Effekt allerdings nicht langfristig anhält. Bereits zum Ende des ersten Schuljahres sind keine Effekte mehr nachweisbar, die sich auf das Trainingsprogramm zurückführen lassen (Krajewski, Nieding & Schneider 2008). Dies erscheint insoweit plausibel, als das entsprechende Trainingsprogramm den Zahlenraum bis 10 umfasst. Somit werden ausschließlich Kompetenzen gefördert, die Gegenstand der unmittelbaren Schulanfangsphase sind. Zudem lässt sich eine Überlegenheit von Förderprogrammen empirisch nicht bestätigen. Vielmehr weist der regelmäßige und zielgerichtete Einsatz ausgewählter (Lern-)Spiele mit mathematischem Potenzial die gleichen Effekte in Bezug auf den Erwerb früher mathematischer Kompetenzen auf wie die Durchführung eines Förderprogramms (Hauser, Vogt, Stebler & Rechsteiner 2014). Generell können mit Lernspielen nachweisbare Erfolge bei der mathematischen Förderung von Kindern im Kita-Alter erzielt werden (Überblick bei Schuler 2013, S. 63–65; Jörns, Schuchardt, Grube & Mähler 2014).

Bildungsbegriff für den Elementarbereich

Angebote zum Mathematiklernen in der Kita müssen sich auch am Bildungsbegriff für den Elementarbereich orientieren. Hierbei wird eine normative Perspektive eingenommen.

> *„Versteht man unter frühkindlicher Bildung einen Prozess, in dem sich das Kind ein Bild von der Welt macht und seinen Erfahrungen Sinn verleiht, so muss der Begriff folglich sowohl selbstbildende als auch ko-konstruktive und befähigende Elemente seitens der Erwachsenen beinhalten" (Stamm & Edelmann 2013, S. 14).*

Frühe mathematische Bildung verdient die Bezeichnung als Bildung demnach nur dann, wenn drei Merkmale erfüllt sind:

- die *aktive Rolle des Kindes* bei der Welterschließung und damit die mathematischen Tätigkeiten des Kindes, die insbesondere in Ansätzen zum Tragen kommen, die auf *Selbsttätigkeit* oder *Selbstbildung* setzen,
- die Berücksichtigung der *individuellen Vorerfahrungen und Interessen der Kinder* und das Anknüpfen an diese bei der Gestaltung von Bildungsangeboten, die es dem Kind auch erlauben, einen Sinn hinter seinen Aktivitäten zu erkennen,
- die *Begleitung der Kinder in ihren Lernprozessen* durch Fachkräfte entsprechend ko-konstruktivistischen Ansätzen, die die Auseinandersetzung mit kompetenten Erwachsenen als wesentlichen Aspekt der Elementarbildung sehen.

Frühe mathematische Bildung darf folglich nicht auf ihre Funktion als Schulvorbereitung reduziert werden, sondern muss auch von den aktuellen Vorerfahrungen und Interessen des Kindes aus konzipiert werden. Deshalb sind sehr eng geführte Förderprogramme zum Zahlbegriffserwerb als Möglichkeit einer kompensatorischen Förderung einzelner Kinder sinnvoll, jedoch nicht als Ansatz früher mathematischer Bildung für alle Kinder.

Frühe mathematische Bildung muss an kindlichen Interessen ansetzen

Aus mathematikdidaktischer Perspektive gilt es weiter zu berücksichtigen, dass bereits frühe mathematische Bildungsprozesse ein adäquates, prozessorientiertes Bild von Mathematik widerspiegeln sollen. Davon ausgehend stehen für den mathematischen Bereich charakteristische Tätigkeiten wie das Explorieren und Lösen von Problemen, das Sich-Austauschen über Lösungswege, das Äußern von Vermutungen oder das Begründen oder Widerlegen von Vermutungen im Vordergrund. Folglich sind nicht nur die Inhalte bedeutsam, sondern auch die *Art und Weise*, wie Kinder diesen Inhalten begegnen.

Im Fokus steht die Art und Weise, wie Kinder Mathematik begegnen

> *„Mathematik ist keine Menge an Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung“ (Freudenthal 1982, S. 140).*

> *„Gerahmt wird jede Begegnung von der Idee des mathematischen Denkens, das sich in Möglichkeiten des Argumentierens und Begründens, aber auch in Kreativität und Mustern zeigen kann“ (Steinweg 2008, S. 146).*

Kinder betreiben also bereits im Kita-Alter Mathematik, auch wenn die Inhalte noch sehr elementar sind. Konsequenterweise spricht Steinweg (2008, S. 155) deshalb von „Basiskompetenzen“ und nicht von „Vorläuferfertigkeiten“ oder „Vorläuferfähigkeiten“, wie dies in Trainingsprogrammen zur Schulvorbereitung üblich ist (z. B. Krajewski & Schneider 2006), denn:

> *„Jede Auseinandersetzung mit Mathematik ist per se Mathematik und keine Vorform“ (Steinweg 2008, S. 144).*

Betont wird auch der Verzicht auf pseudo-kindgerechte Einkleidungen (etwa Zahlen, die miteinander sprechen oder durch Plüschfiguren dargestellt werden), weil diese nicht nur ein falsches Bild von Mathematik vermitteln (Grüßing & Peter-Koop 2007), sondern auch als unnötig erachtet werden:

Pseudo-kindgerechte Einkleidungen sind unnötig

> *„Da Kinder von klein auf ein ursprüngliches Verhältnis zu Zahlen und Formen haben, kann die Motivation für mathematische Aktivitäten von Anfang an aus dem Fach selbst geschöpft werden“ (Wittmann 2004, S. 52).*

Typische Lernangebote beziehen sich beispielsweise auf Perlen, Bauklötze oder gängige, teilweise auch leicht abgewandelte Regelspiele (z. B. Rathgeb-Schnierer 2008; 2012; 2015). Ansätze wie „MATHElino“ (Royar & Streit 2010), „Minis entdecken Mathematik“ (Benz 2010) oder „Gleiches Material in großer Menge“ (Lee 2010) zielen auf grundlegende mathematische Tätigkeiten wie das Sortieren und das Ordnen sowie auf individuelle Strukturierungen und das Herstellen von Mustern. Materialpakete wie „Das kleine Zahlenbuch“ (Müller & Wittmann 2002) oder „Das kleine Formenbuch“ (Müller & Wittmann 2006) sowie das Frühförderprogramm zum Schulbuch „Das Zahlenbuch“ (Wittmann & Müller 2009) zeichnen sich durch eine große Nähe zum Mathematikunterricht in der Grundschule aus, da dieselben Darstellungen und Materialien verwendet werden.

Typische Lernangebote

2.2 Zahlbegriff

Entwicklung des Zahlbegriffs: langer Prozess

Als *Zahlbegriff* oder auch *Zahlverständnis* wird ein korrektes und flexibles Umgehen mit Zahlen in verschiedensten Situationen bezeichnet, das eine ganze Reihe von Teilkompetenzen umfasst (**> 2.2.5** und **Abb. 8**). Die Entwicklung des Zahlbegriffs ist ein langer Prozess, der meist schon vor dem Kita-Alter aufgrund von Alltagserfahrungen beginnt und sich bis weit in die Grundschulzeit hineinzieht. Für die frühe mathematische Bildung ist die Förderung der Zahlbegriffsentwicklung zentral, da ein unzureichend ausgebildeter Zahlbegriff eine häufige Ursache von Schwierigkeiten im Mathematikunterricht ist (Gerster & Schultz 2000; Gaidoschik 2018).

Theorien zur Zahlbegriffsentwicklung

Aktuelle Theorien zur Zahlbegriffsentwicklung entstammen der Forschung zu Ursachen und Prävention von Rechenschwäche. Derzeit gibt es im deutschsprachigen Raum zwei vielzitierte Modelle zur Zahlbegriffsentwicklung, die im Laufe der Zeit auch mehrfach modifiziert wurden (Fritz & Ricken 2008; 2009; Krajewski 2003; Schneider, Küspert & Krajewski 2016). Sie weisen viele Gemeinsamkeiten auf, sind beide empirisch fundiert und stellen eine deutliche Gegenposition zur Stufentheorie nach Piaget dar (vgl. Piaget & Szeminska 1972), die bezüglich der Zahlbegriffsentwicklung mittlerweile empirisch widerlegt wurde und heute als veraltet gilt. Hinzu kommt eine mathematikdidaktische Perspektive, die die Anschlussfähigkeit an den schulischen Mathematikunterricht in den Blick nimmt (Lorenz 2012; Benz, Peter-Koop & Grüßing 2015; Gasteiger 2017).

Im Folgenden werden zunächst wichtige Teilkompetenzen auf dem Weg zum Zahlbegriff beschrieben: das Wissen um Zahlen und Ziffern sowie typische Verwendungssituationen von Zahlen (**> 2.2.1**), das Zählen sowohl rein verbal als auch mit Material (**> 2.2.2**), die simultane und quasisimultane Anzahlerfassung als wichtige Fähigkeiten zum Erkennen von Zahlbildern sowie die Bedeutung von Zahlbildern (**> 2.2.3**) und das Teile-Ganzes-Konzept, d. h. das Verständnis, das eine Zahl in zwei andere Zahlen zerlegt werden kann (**> 2.2.4**). Abschließend wird aufgezeigt, wie diese Teilkompetenzen zum Zahlbegriff zusammenwirken (**> 2.2.5**) und ein Ausblick auf den Unterricht in der Grundschule gegeben (**> 2.2.6**).

2.2.1 Zahlen und Ziffern

Zahlaspekte: Zahlen werden unterschiedlich verwendet

Eine Zahl ist ein abstraktes mathematisches Konzept, das in unterschiedlicher Weise verwendet werden kann. Diese möglichen Verwendungen werden als *Zahlaspekte* bezeichnet (Hasemann & Gasteiger 2014, S. 9–12; Padberg & Benz 2011, S. 13–16; Schipper 2009, S. 91–93):

- Eine Zahl kann für eine *Anzahl* stehen (*Kardinalzahlaspekt*), genauer für die Anzahl der Objekte einer Menge. Eine Anzahl enthält eine Antwort auf die Frage „Wie viele ...?“. Beispiele: „Ich habe fünf Kekse.“ – „ Jedes Kind erhält vier Spielkarten.“
- Eine Zahl kann einen *Rangplatz* innerhalb einer geordneten Reihe angeben (*Ordinalzahlaspekt*). Ein Rangplatz ist eine Antwort auf Fragen wie „Der wievielte ...?“ oder „An welcher Stelle ...?“. Beispiele: „Ich bin der Fünfte in der Warteschlange.“ – „Die Stifte sind in der dritten Schublade von oben.“

- Eine Zahl kann dazu verwendet werden, bestimmte *Objekte eindeutig zu kennzeichnen* und damit von anderen Objekten klar zu unterscheiden (*Kodieraspekt*). Beispiele hierfür sind Postleitzahlen, Telefonnummern, Zahlen in Kfz-Kennzeichen oder Bestellnummern. Charakteristisch für den Kodieraspekt ist, dass die Zahlen keine numerische Bedeutung im engeren Sinne haben. Sie können deshalb auch durch Farben (rote Ebene im Parkhaus statt 3. Ebene), Buchstaben (Gebäude D statt Gebäude 4) oder durch Symbole (Piktogramme für Schwimmbad, Toilette und Speisesaal anstelle der Etagennummer im Aufzug) ersetzt werden. Zudem kann mit diesen Zahlen nicht sinnvoll gerechnet werden.
- Zahlen können *Beziehungen zwischen anderen Zahlen* angeben (*Relationalzahlaspekt*). Beispiele: „5 liegt zwischen 4 und 6." oder „12 ist um 2 mehr als 10.".
- Zahlen werden in Verbindung mit Einheiten zur *Bezeichnung von Größenangaben* herangezogen (*Maßzahlaspekt*). Eine Größenangabe ist die Antwort auf eine Frage „Wie schwer ist ...?" oder „Wie breit ist ..." oder „Wie viel kostet ...?". Beispiele: „Ich wiege 18 Kilogramm." – „Das Buch ist drei Finger dick." – „Eine Brezel kostet 70 Cent".
- Zahlen können *Vielfachheiten beschreiben*, entweder auf einfache Weise oder als Resultat eines multiplikativen Vergleichs (*Operatoraspekt*). Sie geben dann eine Antwort auf Fragen der Art „Wie oft?" oder „Wievielmal so viel...?". Beispiele: „Ich war in den Ferien zehnmal im Schwimmbad." – „Mein Vater wiegt dreimal so viel wie ich." – „Du hast doppelt (zweimal) so viele Gummibärchen wie ich."

Zahlaspekte spiegeln Sichtweisen auf Sachsituationen wider

Die Zahlaspekte sind nicht immer eindeutig, sondern spiegeln eine bestimmte Sichtweise auf eine Sachsituation wider. So können, abhängig von der jeweiligen Sichtweise, in einer Situation auch verschiedene Zahlaspekte zum Tragen kommen: Hausnummern dienen der eindeutigen Bezeichnung der Gebäude für den Briefzusteller (Kodieraspekt), sind aber häufig aus dem Durchnummerieren der Gebäude entstanden, was immer noch beim Suchen eines bestimmten Gebäudes aufgrund der Hausnummer von Bedeutung ist (Ordinalzahlaspekt). Kinder bestimmen die Anzahl der Schritte (Kardinalzahlaspekt), um die Breite eines Fußballtores am Strand abzustecken (Maßzahlaspekt).

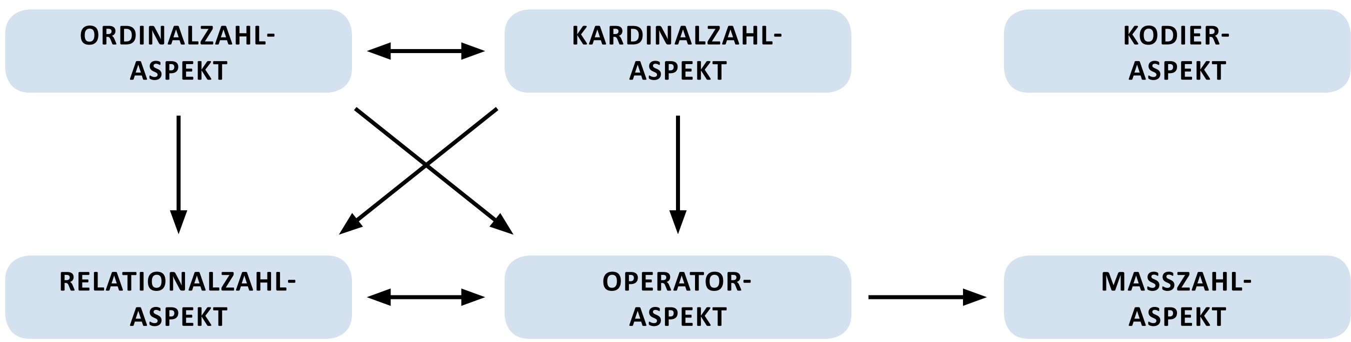


Abbildung 1: Zahlaspekte

Zahlaspekte sind im Lernprozess eng miteinander verknüpft

Auch im Lernprozess sind die Zahlaspekte eng miteinander verknüpft (> **Abb. 1**): Grundlage ist im Kita-Alter meist das Zählen, denn darüber werden sowohl Anzahlen bestimmt (Kardinalzahlaspekt: „Ich habe drei Karten.“) als auch Rangplätze (Ordinalzahlaspekt: „Ich nehme die dritte Karte“). Der Relationalzahlaspekt („Ich habe drei Karten mehr als du.“) setzt den Kardinalzahlaspekt voraus („Ich habe fünf Karten und du hast zwei Karten.“) und erwächst zumindest anfangs aus dem Weiterzählen oder dem Rückwärtszählen. Der Operatoraspekt („... ist das Doppelte von ...“) stellt einen Sonderfall des Relationalzahlaspekts dar. Auch die Bestimmung einer Maßzahl erfolgt durch das Zählen der Einheiten und Untereinheiten. Sicheres Zählen ist damit eine zentrale Grundlage für den Zahlbegriff (> **2.2.5**.), reicht allerdings dafür noch nicht aus (s. Hasemann & Gasteiger 2014, S. 11–12).

Bloßes Zahlensuchen unterstützt Zahlbegriffsentwicklung kaum

Isoliert steht der Kodieraspekt. Er begegnet zwar Kindern in ihrem Lebensumfeld oft (TV-Fernbedienung, Telefon, Hausnummer, Etagenbezeichnung im Hochhaus, ...), ist aber für die Zahlbegriffsentwicklung nicht von Bedeutung. Es ist sogar fraglich, ob beispielsweise eine Postleitzahl überhaupt eine Zahl ist, auch wenn sie so heißt (Padberg & Benz 2011, S. 15). Schließlich wird die Postleitzahl 79117 ziffernweise als „sieben neun eins eins sieben“ und nicht als „neunundsiebzigtausend hundertsiebzehn“ gesprochen. Deswegen tragen auch Aktivitäten, die lediglich auf das Finden von Zahlen im Alltag zielen (zum Beispiel: „Wir sind Zahlendetektive“), kaum zur Zahlbegriffsentwicklung bei.

Zahlen können auf unterschiedliche Weise dargestellt werden (> **Abb. 2**):

- *Zahlbilder* wie Punktmuster oder Strichlisten ermöglichen es, aus der Anzahl der Objekte durch Zählen die dargestellte Zahl zu ermitteln. Erfolgt die Darstellung in strukturierter Weise wie durch Punktmuster in Würfelbildanordnung oder durch eine Fünferbündelung bei Strichlisten, können auch größere Anzahlen auf einen Blick erfasst werden, insbesondere in Kombination mit dem Zählen in Schritten. Beispiel: Werden bei Strichlisten immer zwei Fünferbündel zusammengefasst, kann mühelos in Zehnerschritten gezählt werden.

- Mittels *Zahlzeichen* wie 86 im bei uns üblichen dezimalen Stellenwertsystem oder wie LIIIVI im römischen System. Die Darstellung im dezimalen Stellwertsystem erfolgt durch *Ziffern*. Abhängig davon, an welcher Position die Ziffer steht, gibt sie die Anzahl der Einer, Zehner, Hunderter, ... an. Beispiel: Die Zahl 206 wird durch die drei Ziffern 2, 0 und 6 dargestellt, die für 2 Hunderter und 6 Einer stehen. Grundlage hierfür ist die Idee der Bündelung mit der Bündelungsgröße 10 (deshalb dezimales Stellenwertsystem): 10 Einer werden zu einem Zehner gebündelt, 10 Zehner wiederum zu einem Hunderter, 10 Hunderter zu einem Tausender, etc. Das dezimale Stellenwertsystem bildet die Grundlage für den Größenvergleich mehrstelliger Zahlen oder die schriftlichen Rechenverfahren.

- *Zahlwörter* werden in jeder Sprache anders gebildet: sechsundachtzig, eighty-six, quatre-vingt-six oder huitante-six (in der französischsprachigen Schweiz üblich). Bei zwei- und mehrstelligen Zahlen besteht im Deutschen eine Besonderheit: Die Reihenfolge der Ziffern beim Schreiben, das durchgängig von links nach rechts erfolgt, entspricht nicht der Reihenfolge bei der Zahlwortbildung, da die Einerstelle vor der Zehnerstelle genannt wird (86, aber sechsundachtzig; 245, aber zweihundertfünfundvierzig). Diese Besonderheit stellt eine Lernhürde beim Lesen und Schreiben zwei- und mehrstelliger Zahlen dar, insbesondere auch für Kinder, die Deutsch als Zweit- oder Fremdsprache erlernen und in ihrer Erstsprache andere Formen der Zahlwortbildung kennengelernt haben.

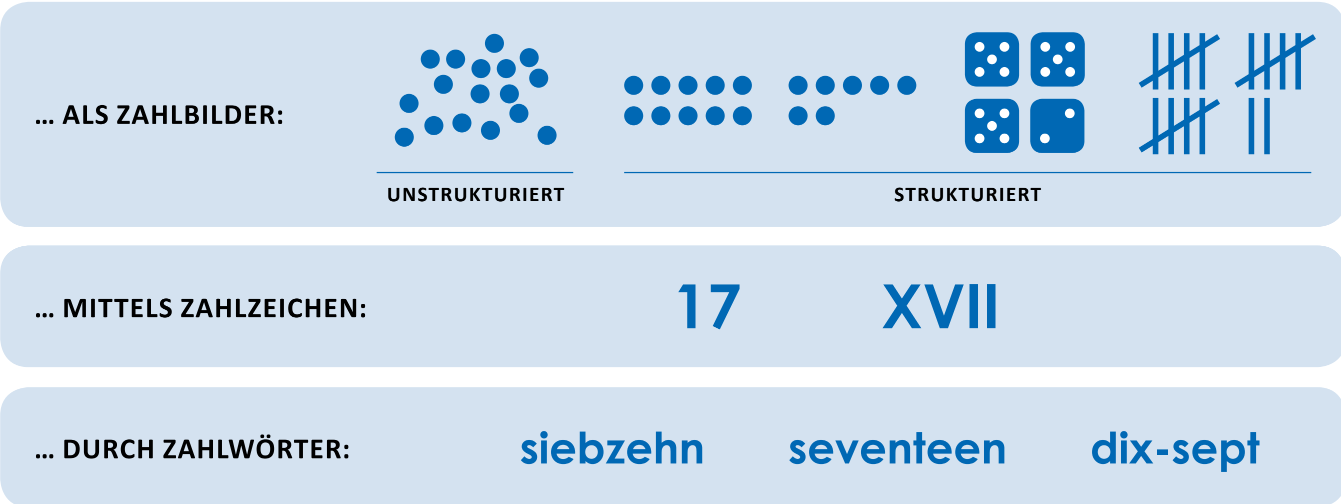


Abbildung 2: Darstellung der Zahl 17

Der Zahlbegriff entwickelt sich nicht durch bloßes Ziffernschreiben

Ziffern dienen der Darstellung von Zahlen. Auch Kinder im Kita-Alter können häufig schon Ziffern lesen und schreiben. Verbreitete Fehler beim Schreiben der Ziffern bestehen darin, dass sie spiegelbildlich dargestellt werden oder die Schreibrichtung nicht stimmt (so das Schreiben der 1 von unten nach oben oder der 5 in einem Zug). Das Lesen und insbesondere das korrekte Schreiben von Ziffern haben allerdings keinen unmittelbaren Einfluss auf die Zahlbegriffsentwicklung: Wenn ein Kind die Ziffer 5 richtig schreiben kann, muss damit noch keine Anzahlvorstellung verbunden sein, und umgekehrt kann auch trotz einer spiegelbildlich geschriebenen 5 eine Anzahlvorstellung vorhanden sein. Aktivitäten, die isoliert auf das Lesen und Schreiben von Ziffern zielen (wie das Schreiben in Sand oder mit Straßenkreide und das Ertasten von Ziffern aus Holz oder in Sandpapierdarstellung), fördern das Erkennen der Ziffern anhand geometrischer Merkmale (spitz, rund, geschlossen, offen, ...), tragen jedoch nicht zur Zahlbegriffsentwicklung bei. Kritisch zu sehen sind Aktivitäten, die einem unsauberen oder spiegelbildlichen Schreiben nicht nur nicht eindeutig entgegenwirken, sondern es möglicherweise sogar unterstützen (Schreiben auf dem Rücken eines anderen Kindes, Schreiben mit dem Finger in der Luft). Das korrekte und flüssige Schreiben der Ziffern entsprechend der üblichen Schreibrichtung ist bei manchen Kindern ein längerer Prozess im Laufe der Grundschulzeit.

2.2.2 Zählen

Kenntnis der Zahlwortreihe ist Voraussetzung, um Material zu zählen

In Bezug auf das Zählen sind das *verbale Zählen*, d. h. das Aufsagen von Zahlwörtern, und das *Zählen mit Material*, das der Anzahlbestimmung dient, zu unterscheiden. Das verbale Zählen ist prinzipiell Voraussetzung dafür, dass ein Zählen mit Material möglich ist. Dementsprechend werden im Folgenden zunächst das verbale Zählen und anschließend das Zählen mit Material dargestellt. Dies bedeutet aber nicht, dass die Entwicklung der beiden Fähigkeiten bei Kindern stets in dieser Reihenfolge und streng nacheinander ablaufen muss. Sie sind vielmehr miteinander verknüpft und können sich wechselseitig anregen.

Das *verbale Zählen* umfasst die Kenntnis der Zahlwortreihe. Es ist eine erste, wichtige Basiskompetenz zum Zahlbegriff, die sich nach und nach entwickelt. Dabei lassen sich verschiedene Niveaustufen des verbalen Zählens unterscheiden (Fuson 1988, S. 33–62; vgl. Padberg & Benz 2011, S. 10–11).

- Zu Beginn, auf **Niveaustufe 1**, können Kinder die *Zahlwortreihe als Ganzes und stets beginnend mit der Eins* aufsagen, allerdings die Zahlwörter noch nicht unterscheiden: „einszweidreivierfünfsechssiebenachtneunzehnelfzwölf". Es handelt sich dabei um eine reine Merkleistung von Wörtern, ein Zählen von Objekten ist noch nicht möglich.
- Später, auf **Niveaustufe 2**, können Kinder die *Zahlwörter klar unterscheiden*, wobei stets bei der Eins begonnen werden muss: „eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, elf, zwölf". Da „sie-ben" das einzige zweisilbige unter den ersten zwölf Zahlwörtern ist, besteht die besondere Schwierigkeit, dass damit zwei Objekte gezählt werden können.
- Auf **Niveaustufe 3** können Kinder *von einer bestimmten Zahl aus weiterzählen*, nicht nur beginnend bei der Eins: „vier, fünf, sechs, sieben". Auch das *Rückwärtszählen* ist möglich: „sechs, fünf, vier, drei, zwei, eins."
- **Niveaustufe 4** zeichnet sich dadurch aus, dass Kinder auch die Zahlwörter zählen und auf diese Weise *um eine vorgegebene Zahl weiterzählen* können: „fünf, sechs, sieben" stellt ein Weiterzählen von der Vier aus um drei Schritte dar. Hierbei werden die Zahlwörter mitgezählt, häufig durch Antippen, auch mit den Fingern. In gleicher Weise ist ein *Rückwärtszählen um eine vorgegebene Zahl* möglich.
- Auf **Niveaustufe 5** schließlich können Kinder *von jeder beliebigen Zahl aus flexibel vorwärts- und rückwärts zählen*, auch in Schritten: „sieben, neun, elf, dreizehn, fünfzehn, siebzehn, neunzehn" und „zwanzig, achtzehn, sechzehn, vierzehn".

Wer Zahlwörter bilden kann, kann in größeren Zahlenräumen zählen

Während Kinder die Zahlwörter bis etwa zur 20 meist noch als Ganzheit lernen (beispielsweise „vierzehn" als ein Zahlwort, dessen Struktur noch nicht unbedingt erkannt wird), benötigen sie in größeren Zahlenräumen die *Prinzipien der Zahlwortbildung*, um erfolgreich zählen zu können. Hierbei kommen die Besonderheiten der Zahlwortbildung im Deutschen zum Tragen (> **2.2.1**). Schwierigkeiten bereiten vor allem die Übergänge zum nächsten Zehner („neununddreißig, vierzig"), weil sich hierbei sowohl die Zehner- als auch die Einerstellen ändern, während das Zählen innerhalb eines Zehners („vierzig, einundvierzig, zweiundvierzig, …") deutlich einfacher ist und daher besser gelingt.

Deshalb können Kinder, sobald sie die Prinzipien der Zahlwortbildung verstanden haben, oft auch schon relativ weit verbal zählen (Schmidt 1982). Individuelle Zahlwortbildungen (wie „zweizig“ oder „achtzehn, neunzehn, zehnzehn, elfzehn, zwölfzehn“) folgen durchaus einer gewissen Logik und sind Indikatoren dafür, dass Kinder Sprache nicht nur durch Nachahmen lernen, sondern auch selbstständig konstruieren (vgl. individuelle Verbformen wie „mitgebringt“ statt mitgebracht und „aufgegesst“ statt aufgegessen oder individuelle Pluralbildungen wie „Auton“ statt Autos und „Pullovers“ statt Pullover). Sie stellen demnach natürliche Entwicklungsschritte von Kindern dar, die die sprachlichen Konventionen erst noch erlernen müssen.

Verbales Zählen ist eine Grundlage für den Zahlbegriffserwerb

Das Aufsagen der Zahlwortreihe bis 20 gelingt fast allen Kindern am Schulanfang (Schmidt 1982). Allerdings bedürfen jene Kinder, denen ein Aufsagen der Zahlwortreihe am Ende der Kindergartenzeit nur mühsam und fehlerhaft gelingt, besonderer Aufmerksamkeit, da das verbale Zählen eine Grundlage für den Zahlbegriffserwerb darstellt (> **2.2.5**). Umgekehrt ist das bloße Aufsagen der Zahlwortreihe noch kein Indikator dafür, dass ein Kind in der Zahlbegriffsentwicklung schon weit vorangeschritten ist.

In Bezug auf das *Zählen mit Material* lassen sich zwei Fähigkeiten unterscheiden (> **Abb. 3**):

- Beim *Auszählen* wird die Elementanzahl einer Menge bestimmt. Beispiel: „Wie viele Kekse liegen auf dem Teller?“
- Beim *Abzählen* gilt es, aus einer Menge von Objekten eine bestimmte Anzahl herauszugreifen. Beispiel: „Gib mir fünf Kekse.“

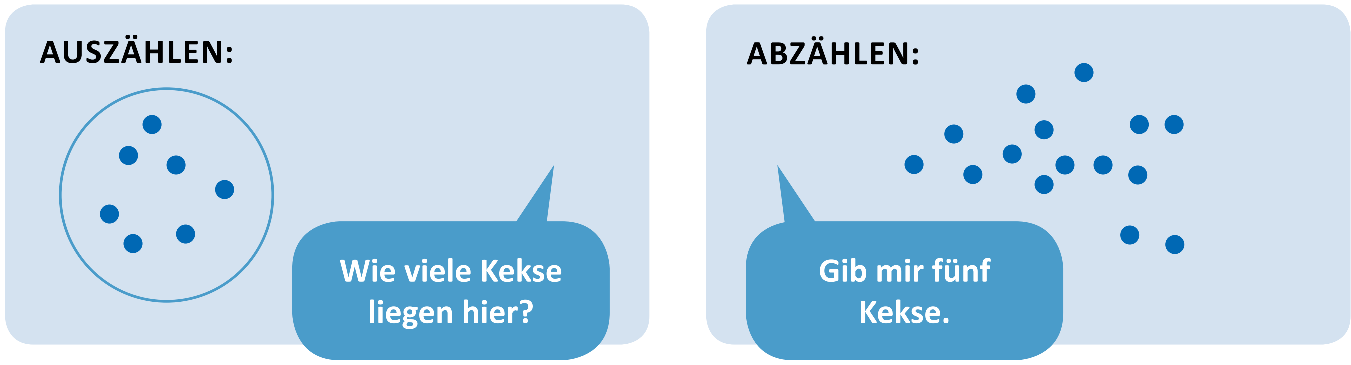


Abbildung 3: Auszählen und Abzählen

Auszählen und Abzählen von Mengen

Die klare Unterscheidung der Zahlwörter, die ab der zweiten Niveaustufe gelingt, ist Voraussetzung für das Auszählen und Abzählen von Mengen. Solange ein Aufsagen der Zahlwortreihe nur beginnend mit der Eins möglich ist, ein Weiterzählen hingegen noch nicht, ist ein *vollständiges Auszählen aller Objekte* eine charakteristische Vorgehensweise (> **Abb. 4**). Beispiel: Ein Kind, das fünf Objekte vor sich liegen hat und acht abzählen soll, fügt ein Objekt hinzu und zählt alle sechs Objekte aus. Dann fügt es nochmals eines hinzu und zählt wiederum alle Objekte aus, usw. Ab der dritten bzw. vierten Niveaustufe des verbalen Zählens kann ein Weiterzählen zur Anzahlbestimmung eingesetzt werden. Auf diese Weise können Kinder auch einfache Additions- und etwas später Subtraktionsaufgaben lösen.

Abbildung 4: Vollständiges Auszählen Niveaustufe 2

Zählendes Rechnen ist fehleranfällig

Ein derartiges zählendes Rechnen ist aber sehr fehleranfällig: Die Aufgabe 4 + 3 erfordert ausgehend von der Vier ein Weiterzählen um drei Schritte: „fünf, sechs, sieben". Die Schwierigkeit besteht darin, dass die Vier als Startpunkt nicht mehr genannt werden darf. Dementsprechend ist das Weiterzählen in der Form „vier, fünf, sechs" ein typischer Fehler, der zum Ergebnis 6 führt. Auf der fünften Niveaustufe kann schließlich ein Zählen in Schritten erfolgen (beispielsweise in Zweier- oder Fünferschritten), wenn eine entsprechende Bündelung gegeben ist oder vom Kind hergestellt werden kann.

Kinder können sich in unterschiedlichen Zahlenräumen durchaus auf verschiedenen Niveaustufen des verbalen Zählens befinden. Zudem gelingt ein rein verbales Zählen häufig in einem größeren Zahlenraum als das Zählen mit Material.

Anzahlkonzept: Wissen, dass Zahl für Anzahl von Objekten steht

Aus dem Zählen mit Material kann bei Kindern ein *Anzahlkonzept* hervorgehen (Schneider, Küspert & Krajewski 2016, S. 27–30): Als Anzahlkonzept bezeichnet man das Wissen, dass eine Zahl für eine Anzahl von Objekten stehen kann. Anfangs verfügen Kinder über ein *unpräzises Anzahlkonzept*: Sie wissen, dass kleine Zahlen für geringe Anzahlen und große Zahlen für große Anzahlen stehen (z.B. Zählweise „eins, zwei, viele" oder Verwendung von „tausend" für sehr viele Objekte sowie von „hundert Kilo" für das Gewicht eines sehr schweren Objekts). Hieraus entwickelt sich ein *präzises Anzahlkonzept*, wenn Kinder auf der Grundlage einer stabilen Zahlwortreihe jedem Zahlwort genau ein Objekt zuordnen können. Dies unterstreicht die Bedeutung des Zählens für die Zahlbegriffsentwicklung.

2.2.3 Simultane und quasisimultane Anzahlerfassung, Zahlbilder

Erfassen von Anzahlen auf einen Blick

Das Zählen ist keineswegs die einzige Möglichkeit, Anzahlen zu bestimmen. Kleine Anzahlen bis etwa vier oder fünf Elemente lassen sich unabhängig von der Anordnung auf einen Blick erfassen. Beispiel: Dass auf einem Teller drei Kekse liegen, sieht man sofort. Diese Fähigkeit, über die Kinder meist schon sehr früh verfügen, wird als *simultane An-*

zahlerfassung oder (wie in der Psychologie üblich) als *Subitizing* bezeichnet. Bei größeren Anzahlen ist dies nicht mehr möglich. Beispiel: Ob acht oder neun Kekse auf einem Teller liegen, lässt sich meist nicht mehr auf den ersten Blick erkennen. Möglich ist hingegen eine *quasisimultane Anzahlerfassung*, wenn die Objekte strukturiert und in bekannten Anordnungen dargeboten werden. Solche bekannten Anordnungen können die Würfelbilder sein, aber auch Strichlisten mit Fünferbündeln oder anderweitig strukturierte Punktebilder (**> Abb. 2**). Eine quasisimultane Anzahlerfassung setzt voraus, dass die Teilbilder im visuellen Gedächtnis gespeichert sind und entsprechend abgerufen werden können. Sie kann mittels *Blitzblick-Übungen* im Kita- und Grundschulalter gezielt gefördert werden. Entscheidend hierbei ist, dass die Kinder nicht nur die betreffende Zahl nennen. Sie sollten vielmehr auch beschreiben, warum sie diese auf einen Blick erkennen konnten und wie sie die Punkte strukturiert haben (Beispiel: „Ich habe sieben Punkte gesehen. Hier sind es vier Punkte und dort nochmals drei.“).

Bedeutung von Zahlbildern bei der Entwicklung des Zahlbegriffs

Zahlbilder, insbesondere *strukturierte Zahlbilder*, spielen eine wesentliche Rolle bei der Entwicklung des Zahlbegriffs. Sie ermöglichen das Erkennen von *Zahleigenschaften* und *Zahlbeziehungen*: Neben den Zahlzerlegungen sind das Beziehungen wie „... ist um 1 mehr als ...“ oder „... ist um 2 weniger als ...“ sowie die Ergänzung zur 10. Weiter von Bedeutung sind Zahlbeziehungen wie „... ist das Doppelte von ...“ oder „... ist die Hälfte von ...“ sowie „... ist um 1 mehr/weniger als das Doppelte von ...“. Hieraus erwachsen wiederum die Zahleigenschaften als gerade und ungerade Zahlen: Erstere sind Zahlen, die sich halbieren lassen, letztere sind Zahlen, bei denen das nicht möglich ist (**> Abb. 10**). In Fortsetzung davon lassen sich auch einfache multiplikative Zerlegungen an Rechteckfeldern ablesen.

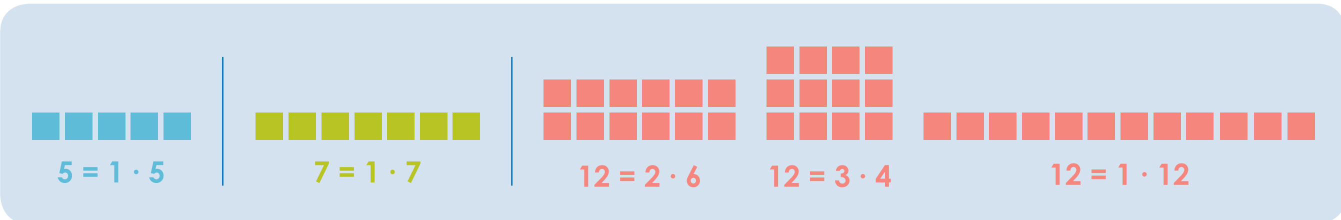


Abbildung 5: Darstellung der Zahlen 5, 7 und 12 in Rechteckfeldern

Beispiele: Schon das Würfelbild der 6 legt nahe, dass 2 mal 3 gleich 3 mal 2 ist. Auch die multiplikative Zerlegung von 9 als 3 mal 3 lässt sich an einem passenden Feld erkennen. Zahlbilder sind damit die Grundlage eines *relationalen Zahlbegriffs*, der ein dichtes Netz von Zahleigenschaften und -beziehungen umfasst. Generell gilt, dass jedes Zahlbild jeweils andere Zahleigenschaften oder -beziehungen nahelegt – kein Zahlbild kann alle erklären.

Würfelbilder sind bei Zahlbegriffsentwicklung nur bedingt hilfreich

Die bekanntesten Zahlbilder im Kita-Alter sind die *Würfelbilder*, weil diese im Alltag vieler Kinder präsent sind. Allerdings besitzen sie auch Grenzen. Ungünstig ist insbesondere, dass die Zahlbeziehungen nicht in allen Fällen deutlich werden, weil nicht nur ein Punkt hinzugefügt wird, sondern die Punkte immer wieder völlig neu gruppiert werden. Beispiele: Die Fünf ergibt sich aus der Vier durch einen zusätzlichen Punkt in der Mitte. Bei der Sechs sind die Punkte jedoch anders angeordnet als bei der Fünf. Die Sechs lässt sich zwar als Doppel-Drei erkennen, allerdings sind die drei Punkte jeweils nicht diagonal angeordnet wie bei der Drei. Nicht nur deshalb besteht die Gefahr, dass die Würfelbilder sich verselbstständigen: Sie werden dann wie Piktogramme aufgefasst, was die weitere Zahlbegriffsentwicklung nicht mehr unterstützt.

Das vollständige Auszählen ist meist der erste Zugang zur Anzahlbestimmung. Allerdings gibt es auch in der Kita bereits Kinder,

- die Anzahlen simultan oder quasisimultan erfassen,
- die in Schritten zählen oder weiterzählen,
- die Zahlbeziehungen nutzen.

Nicht selten treten auch Mischformen auf:

- Ein Kind, das die Anzahl der Kekse auf dem Teller bestimmen will, erfasst zunächst sechs Kekse quasisimultan aufgrund der Anordnung, die dem Würfelbild ähnlich ist, zählt dann in Zweierschritten bis zum zwölften Keks und bestimmt den letzten als dreizehnten.
- Ein Kind, das 25 Bausteine abzählen will, zählt zunächst zehn Bausteine ab, legt anschließend nochmals genauso viele darunter (bestimmt also Zwanzig als Doppel-Zehn) und zählt dann weitere fünf Bausteine ab.

Individuelle Nutzungen von Zahlbeziehungen sind wertvoll

Derartige Vorgehensweisen sind erste Indikatoren für die Nutzung von Zahlbeziehungen. Sie sind als solche unbedingt zu unterstützen, weil sie später für die Ablösung vom zählenden Rechnen hilfreich sind. Es ist deshalb in solchen Fällen nicht sinnvoll, durch einen Impuls zum Nachzählen auf das vollständige Auszählen zu drängen.

Für den mathematischen Anfangsunterricht werden heute strukturierte Zahlbilder in einem *Zwanzigerfeld* präferiert, das in vier Fünfergruppen untergliedert ist. Das Auszählen aller Objekte ist zwar möglich, soll jedoch nach und nach überwunden werden: Innerhalb der Fünfergruppen ist eine simultane Anzahlerfassung möglich, darüber hinaus wird eine quasisimultane Anzahlerfassung unterstützt, die auf der Kombination von Fünfergruppen und weiteren Objekten basiert (auch als „Kraft der Fünf“ bezeichnet). Beispiel: Die 13 Punkte auf dem Zwanzigerfeld lassen sich je nach Darstellung auf unterschiedliche Weise quasisimultan erfassen (> **Abb. 6**):

- als zehn und drei Punkte, wobei die zehn Punkte als zweimal fünf Punkte hintereinander (linke Darstellung) oder übereinander (rechte Darstellung) erkannt werden können,
- als acht und fünf Punkte (linke Darstellung),
- als sieben und sechs Punkte (rechte Darstellung).

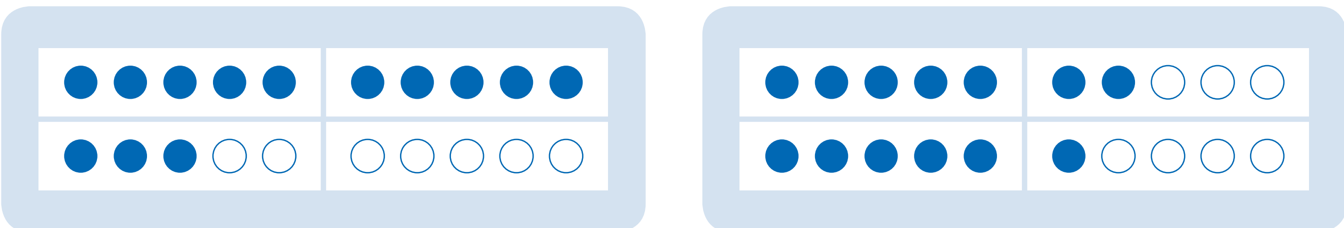


Abbildung 6: Darstellung der 13 am Zwanzigerfeld in Zeilendarstellung (links) und Blockdarstellung (rechts)

Auch die jeweils leeren Felder können zur Anzahlerfassung herangezogen werden. Beispiel: 17, 18 oder 19 Punkte lassen sich relativ schnell durch die leeren Felder erkennen, die die Differenz zu 20 angeben.

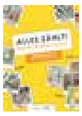
Nutzung von Zahlbildern als Grundlage für Rechenstrategien

Im Mathematikunterricht werden Punktefelder darüber hinaus auch im Hunderter- und Tausenderraum verwendet, um beispielsweise Rechenstrategien abzuleiten. Daher ist das Lesen und Nutzen von Zahlbildern wesentlich für den Erfolg der Kinder. Umgekehrt zeichnen sich rechenschwache Kinder häufig auch dadurch aus, dass sie Zahlbilder nicht adäquat nutzen können.

Lose Materialien bieten Möglichkeiten, haben aber Grenzen

Lose Materialien, die in freier Weise verwendet werden (Kastanien, Muggelsteine, Steckwürfel, ...), eignen sich, um erste Auszähl- und Abzählversuche zu unterstützen. Sie können auf diese Weise zu einem Anzahlkonzept und damit zur Zahlbegriffsentwicklung beitragen. Weiter können sie gut eingesetzt werden, um Eigenstrukturierungen der Kinder oder Ideen zur Bündelung anzuregen, die wiederum ein Zählen in Schritten und das Anfertigen von Strichlisten erlauben. Generell sollten diese Materialien in größerer Menge vorliegen, um auch Kindern mit umfangreicheren Vorkenntnissen Herausforderungen zu bieten. Jedoch eignen sich lose Materialien ohne strukturierende Felder nicht für das Rechnenlernen, da sie das Auszählen wie auch das Abzählen unterstützen und folglich kaum Impulse für die Entwicklung von Zahlbildern und das Überwinden des zählenden Rechnens liefern. Strukturierungshilfen können die Kinder dabei unterstützen, lose Materialien zunehmend als Zahlbilder gebündelt zu erfassen (z.B Eier in Eierkartons).

MEHR DAZU



PRAXISHEFT
Kap. 4: Kinder nutzen Zahlbilder und erfassen Anzahlen

KARTE 4 Kinder nutzen Zahlbilder und erfassen Anzahlen

2.2.4 Teile-Ganzes-Konzept

Jede Menge mit mindestens zwei Elementen lässt sich in Teilmengen zerlegen

Das *Teile-Ganzes-Konzept* umfasst das Verständnis von Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen und die Fähigkeit, diese Zusammensetzungen flexibel einsetzen zu können (> **Abb. 7**). Dahinter steht, dass sich jede Menge mit mindestens zwei Elementen in mindestens zwei Teilmengen zerlegen lässt. Entsprechend lässt sich jede Zahl ab 2 in mindestens zwei sogenannte Summanden zerlegen. Beispiel: 5 kann in die Summanden 3 und 2 zerlegt werden, oder anders formuliert, 5 ist zusammengesetzt aus 3 und 2.

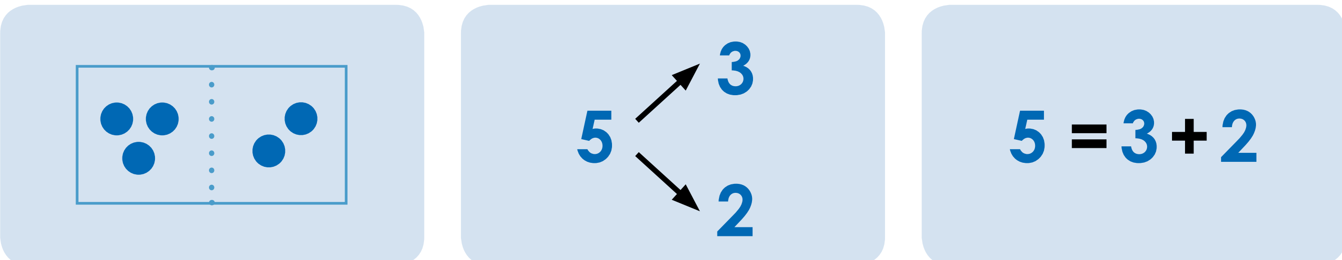


Abbildung 7: Teile-Ganzes-Konzept

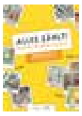
Teile-Ganzes-Konzept als Grundlage für Addition und Subtraktion

Ein Kind, das eine Zahlzerlegung kennt, kann auf dieser Basis Additions- und Subtraktionsaufgaben (Plus- und Minusaufgaben) lösen, ohne zählen zu müssen. Beispiel: Das Wissen um die Zerlegung von 5 in 3 und 2 ist Grundlage für die Lösung der Additionsaufgaben 3 + 2 und 2 + 3 sowie der Ergänzungsaufgaben 3 + $\square$ = 5 bzw. 2 + $\square$ = 5, die auch als Subtraktionsaufgaben 5 − 3 bzw. 5 – 2 dargestellt werden können. Diese Zahlzerlegungen sind unter anderem notwendig, um den klassischen Zehnerübergang bewältigen zu können. Beispiel: 8 + 5 = 8 + 2 + 3 = 10 + 3 = 13. Neben der Zerlegung der 5 in 2 und 3 wird hier auch das Wissen um die Zerlegung der 10 in 8 und 2 benötigt („Wie viel fehlt von der 8 zur 10?“).

Strukturierte Zahlbilder fördern Teile-Ganzes-Konzept

Das Teile-Ganzes-Konzept stellt später im Mathematikunterricht der ersten Klasse eine wichtige Grundlage für das Addieren und Subtrahieren dar. Ein nicht ausgeprägtes Teile-Ganzes-Konzept ist dementsprechend ein typisches Merkmal rechenschwacher Kinder (Gerster & Schultz 2000). Ein Indikator hierfür liegt vor, wenn Kinder stets vollständig auszählen und Zusammenhänge zu schon bekannten Anzahlen nicht nutzen. In diesen Fällen bedarf die Entwicklung eines Teile-Ganzes-Konzepts einer gezielten Förderung im mathematischen Anfangsunterricht. Eine wesentliche Grundlage hierfür sind strukturierte Zahlbilder, die die Deutung als Zahlzerlegungen erlauben. Derartige Aktivitäten können auch in der Kita schon angeregt werden. Insbesondere sollten Kinder, die bereits Zahlzerlegungen nutzen und erste Zahlbeziehungen erkennen, entsprechend unterstützt und nicht zu einem vollständigen Auszählen („Zähl mal nach!“) angeleitet werden.

MEHR DAZU



PRAXISHEFT
Kap. 4: Kinder nutzen Zahlbilder und erfassen Anzahlen

KARTE **4** Kinder nutzen Zahlbilder und erfassen Anzahlen

2.2.5 Entwicklungsmodell zum Zahlbegriff

Teilkompetenzen zur Entwicklung des Zahlbegriffs

Das Entwicklungsmodell zum Zahlbegriff veranschaulicht das Zusammenwirken der jeweiligen Teilkompetenzen (**> Abb. 8**). Es kann helfen, vorhandene Kompetenzen sowie auftretende Defizite von Kindern zu verorten und gezielte Impulse zur weiteren Förderung abzuleiten. Das Modell darf jedoch nicht als Abfolge von Lernschritten oder gar als striktes Stufenmodell (eine Stufe kann erst dann entwickelt werden, wenn die vorausgehende schon vollständig erreicht wurde) missverstanden werden. Die Entwicklung des Zahlbegriffs ist vielmehr ein langfristiger Prozess, bei dem die Entwicklung der Teilkompetenzen ineinander übergehen kann. So ist nicht selten der Zahlbegriff eines Kindes in verschiedenen Zahlenräumen unterschiedlich weit ausgeprägt (Beispiel: Ansätze eines relationalen Zahlbegriffs im Zehnerraum, überwiegend ordinaler Zahlbegriff im Zwanzigerraum).

Die Abbildung ist folgendermaßen zu lesen: Eine Grundlage des Zahlbegriffs ist verbales Zählen, das sich von *der Kenntnis der Zahlwortreihe* hin zu einem *flexiblen Zählen* entwickelt. Es erlaubt unmittelbar ein Zählen mit Material, das entsprechend von einem *vollständigen Auszählen* bis hin zu einem *zählenden Rechnen* fortschreitet. Die Zahlwortreihe stellt sprachlich repräsentiertes Wissen über Zahlen dar und ist grundlegend sowohl für einen kardinalen als auch für einen ordinalen Zahlbegriff.

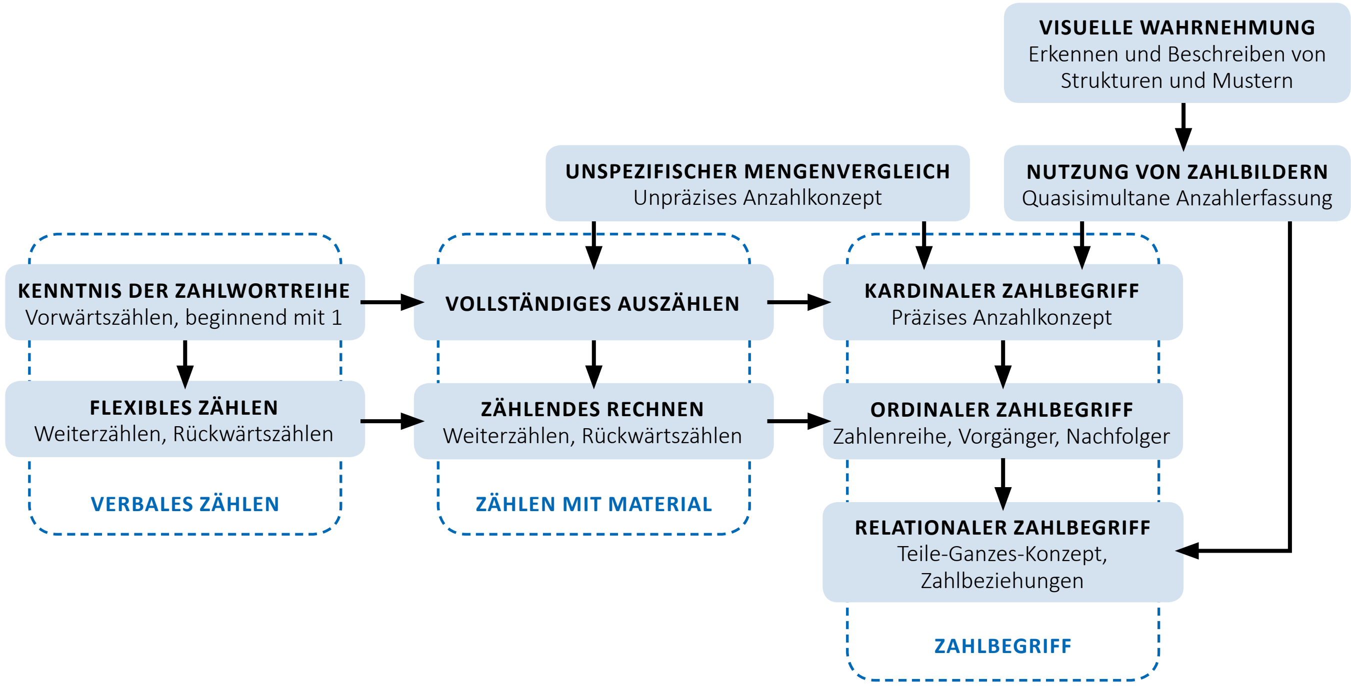


Abbildung 8: Wesentliche Schritte zur Entwicklung des Zahlbegriffs

Die Entwicklung des kardinalen Zahlenbegriffs

Zusammen mit einem anfangs noch *unspezifischen Mengenvergleich* erwächst aus dem Zählen mit Material zunächst ein *kardinaler Zahlbegriff*: Eine Zahl steht für die Anzahl der Elemente einer Menge; die Bestimmung der Elementanzahl erfolgt anfangs durch vollständiges Auszählen, später auch durch ein Zählen in Schritten oder die Nutzung von Zahlbildern. Auf diese Weise erwächst aus einem *unpräzisen Anzahlkonzept* ein *präzises Anzahlkonzept*.

Flexibles Zählen als Grundlage für einen ordinalen Zahlbegriff

Können Kinder die Reihenfolge der Zahlwörter nutzen, können sie insbesondere den Vorgänger und den Nachfolger einer Zahl angeben („Welche Zahl kommt vor/nach der Fünf?“) und ihnen gelingt in der Folge zählendes Rechnen: Sie lösen durch Weiterzählen, Rückwärtszählen oder auch Zählen in Schritten einfache, kontextbezogene Additions- und Subtraktionsaufgaben. Das flexible Zählen ist Grundlage für einen *ordinalen Zahlbegriff*. Auf diese Weise entwickelt sich die Zahlenreihe mit einer Vorgänger-Nachfolger-Beziehung, die auch mit entsprechenden Anzahlvorstellungen verbunden ist.

Zahlbilder als Voraussetzung für späteres Addieren und Subtrahieren

Die *Nutzung von Zahlbildern*, die wiederum eine ausgeprägte *visuelle Wahrnehmung* und die Fähigkeit zum Erkennen und Beschreiben von Strukturen und Mustern voraussetzt, trägt dazu bei, ein *Teile-Ganzes-Konzept* zu entwickeln. Nun können Additions- und Subtraktionsaufgaben auch nichtzählend gelöst werden, wobei gleichzeitig ein Operationsverständnis für die Addition und Subtraktion ausgebildet wurde.

Relationaler Zahlbegriff als Grundlage für flexible Rechenstrategien

Ein *relationaler Zahlbegriff* umfasst vielfältige, miteinander verknüpfte Zahleigenschaften und *Zahlbeziehungen*, als Grundlage sowohl für flexibel einsetzbare Rechenstrategien als auch für ein Verständnis des Stellenwertsystems. In der Folge ändert sich die Repräsentation der Zahlen grundlegend (Lorenz 2012, S. 40): Während kleine Zahlen häufig durch Anzahlvorstellungen und Zahlbilder repräsentiert sind (> **Abb. 2** und > **Abb. 6**), gewinnt bei größeren Zahlen eine Zahlenstrahl-ähnliche Repräsentation an Bedeutung (> **Abb. 9**).

Diese kann präzise (Beispiele: „694 ist um 6 kleiner als 700“ oder „760 ist um 10 größer als 750“), aber auch qualitativ und damit unscharf sein (Beispiele: „694 ist etwas weniger als 700“ oder „760 ist ungefähr in der Mitte zwischen 700 und 800, etwas näher bei 800 als bei 700“).

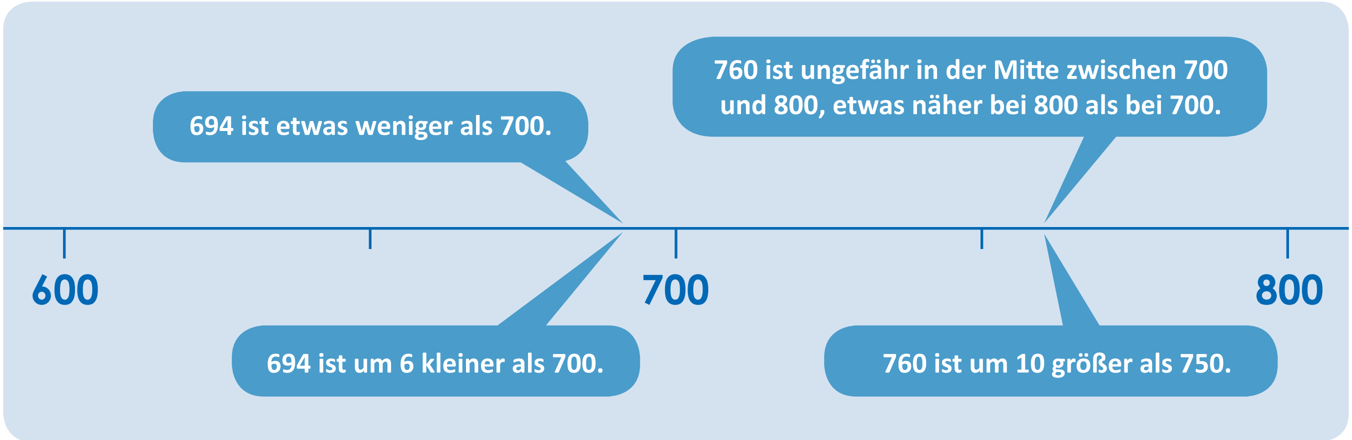


Abbildung 9: Relationaler Zahlbegriff

2.2.6 Ausblick: Mathematischer Anfangsunterricht in der Grundschule

Ein Hauptziel in Klasse 1 ist die Überwindung des zählenden Rechnens

Zentrale Inhalte des Mathematikunterrichts in Klasse 1 sind die *Erschließung des Zahlenraums bis 20* sowie das *Addieren und Subtrahieren* in diesem Zahlenraum (kleines Einspluseins und Einsminuseins). Die Kinder sollen am Ende von Klasse 1 nicht nur die Additions- und Subtraktionsaufgaben automatisiert haben (als Fakten abrufen können), sondern auch ein adäquates Operationsverständnis (Verständnis der Bedeutung von Addieren und Subtrahieren) aufgebaut haben. Während das Zählen im Kita-Alter und zu Beginn von Klasse 1 der natürliche Zugang zum Rechnen ist, wird im Laufe der ersten Klasse eine Überwindung des *zählenden Rechnens* angestrebt. Zentrale Grundlage hierfür ist die Nutzung von Zahlbildern. Wenn Kinder in Klasse 2 und höher ein *verfestigtes zählendes Rechnen* zeigen, gilt dies als ein Indikator für das Vorliegen einer Rechenschwäche. Es besteht spätestens in Klasse 2 die Gefahr, dass diese Kinder im Mathematikunterricht endgültig abgehängt werden, weil zählendes Rechnen auf Dauer sehr fehleranfällig ist und keine Basis für die Erschließung größerer Zahlenräume bietet.

Die Ursachen einer Rechenschwäche sind vielfältig

Die von Eltern häufig gestellte Frage, ob und in welcher Weise man schon im Kita-Alter einer möglichen Rechenschwäche vorbeugen kann, ist nicht einfach zu beantworten. Zum einen bietet eine sogenannte Rechenschwäche oder Rechenstörung kein einheitliches Bild, sondern eher ein Bündel an Symptomen, die in unterschiedlicher Zusammensetzung auftreten können (Fritz & Ricken 2008; von Aster & Lorenz 2013; Gaidoschick 2018). Beispielweise kann ein Teil der betreffenden Kinder tatsächlich weniger als andere Kinder, während manche nur langsamer rechnen als andere (Dornheim 2008). Zudem zeigen sich wesentliche Merkmale einer Rechenschwäche (wie Defizite beim Teile-Ganzes-Konzept, beim Operationsverständnis oder beim Stellenwertverständnis) erst später. Auch werden Versäumnisse im mathematischen Anfangsunterricht aus mathematikdidaktischer Sicht als häufige Ursache für Rechenschwäche ausgemacht (Gaidoschik 2017).

2.3 Entwicklung weiterer mathematischer Kompetenzen

Frühe mathematische Bildung ist mehr als der Aufbau des Zahlbegriffs

Da eine Fokussierung der frühen mathematischen Bildung auf für den Mathematikunterricht relevante Schwerpunkte sinnvoll ist (Wittmann 2016), spielt der Zahlbegriff eine zentrale Rolle. Allerdings sind die Vorerfahrungen und Interessen der Kinder häufig weitaus breiter und richten sich auch auf andere Bereiche der Mathematik. Deshalb werden im Folgenden das Klassifizieren und Ordnen als grundlegende mathematische Tätigkeiten (**> 2.3.1**), Muster und Strukturen (**> 2.3.2**), die visuelle Wahrnehmung und das räumliche Vorstellungsvermögen (**> 2.3.3**) sowie Größen und Messen (**> 2.3.4**) angesprochen.

2.3.1 Klassifizieren und Ordnen

Klassifizieren: Objekte nach Eigenschaften zusammenfassen

Als *Klassifizieren* bezeichnet man das Zusammenfassen von Objekten zu Klassen aufgrund bestimmter gemeinsamer Eigenschaften; von anderen, als hierfür unwichtig erachteten Eigenschaften wird dabei abgesehen. So können Bausteine nach der Farbe unterschieden und entsprechend sortiert werden; dabei werden Größe und Form nicht beachtet. Bausteine können aber auch nach Farbe und Größe sortiert werden – man unterscheidet dann z. B. große rote Bausteine von kleinen roten Bausteinen und diese wiederum von kleinen grünen Bausteinen.

Durch Klassifizieren mathematische Begrifflichkeiten kennenlernen

Mathematische Begriffe werden häufig gebildet, indem Objekte aufgrund gleicher Eigenschaften zusammengefasst werden: Die geraden Zahlen beispielsweise sind alle Zahlen, die sich halbieren lassen, während bei den ungeraden beim Versuch des Halbierens immer ein Rest bleibt. Auch die geometrischen Grundbegriffe lassen sich als Ergebnis eines Klassifizierens auffassen: Figuren werden zunächst nach der Anzahl ihrer Ecken sortiert (Dreieck, Viereck, Fünfeck, …); diese Klassifizierung ist überschneidungsfrei – jede Figur passt in genau eine der Klassen. Weiter können beispielsweise die Vierecke noch nach Längen- oder Winkeleigenschaften sortiert werden: Ein Rechteck zeichnet sich durch vier rechte Winkel aus, ein Quadrat darüber hinaus noch durch vier gleich lange Seiten. Diese Klassifizierung ist nicht überschneidungsfrei, da jedes Quadrat stets auch ein Rechteck ist.

Ordnen: Objekte in bestimmte Rangfolge bringen

Das *Ordnen* oder auch *Seriieren* bedeutet, dass Objekte in eine eindeutige Rangfolge gebracht werden: Zahlen lassen sich der Größe nach ordnen, Holzstäbe nach ihrer Länge, Gefäße nach ihrem Volumen. Um Objekte ordnen zu können, ist eine Relation (Beziehung) zwischen zwei Objekten notwendig, die eine Rangfolge festlegt. Diese Relation kann durch Zahlen gegeben sein (Körpergröße, Gewicht, Startplatz, Anzahl der Ecken, Punkte oder Löcher, …), aber auch qualitativ durch direktes Vergleichen ermittelt werden (Körpergröße durch Rücken-an-Rücken-Stellen der Kinder, Länge von Objekten durch Nebeneinanderlegen, Volumen von Schüsseln durch Ineinanderstellen, …).

Ordnen ist nicht dasselbe wie Sortieren

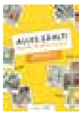
Umgangssprachlich wird Ordnen allerdings auch in der Bedeutung von Klassifizieren verwendet. Mathematisch gesehen lassen sich Bausteine jedoch nur nach ihrer Farbe sortieren (in Klassen einteilen), jedoch nicht nach ihrer Farbe ordnen, weil es keine Rangfolge der Farben gibt. Das Ordnen im mathematischen Sinne hat auch nichts mit dem Ordnung-Schaffen oder Aufräumen im Kinderzimmer oder in der Kita zu tun.

Auch mentales Klassifizieren und Ordnen ist möglich

Klassifizieren und Ordnen können Kinder konkret durchführen, indem sie Gegenstände umlegen, aber auch gedanklich. Wenn ein Kind sagt „Ich brauche einen roten Sechser", dann hat es seine Lego-Steine gedanklich nach Farbe und Anzahl der Knöpfe (oder Länge) klassifiziert. Wenn umgekehrt aber ein Kind Lego-Steine unabhängig von ihrer Farbe verbaut, darf nicht daraus geschlossen werden, dass es diese Klassifizierung nicht vornehmen kann – sie ist ihm möglicherweise in der aktuellen Situation lediglich nicht wichtig, vielleicht weil das schnelle Bauen Vorrang hat vor einem einfarbigen Produkt.

Während Tätigkeiten wie Klassifizieren und Ordnen früher entsprechend der Stufentheorie nach Piaget als wichtige Vorläufer für die Zahlbegriffsentwicklung betrachtet wurden (Piaget & Szeminska 1972), stehen sie heute eher für typisch mathematische Tätigkeiten, die Kinder schon im Kita-Alter ausführen können (Rathgeb-Schnierer 2015).

MEHR DAZU



PRAXISHEFT
Kap. 6: Kinder klassifizieren und ordnen

KARTE 6
Kinder klassifizieren und ordnen

2.3.2 Muster und Strukturen

„Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern."

Die zentrale Bedeutung von Strukturen und Mustern ist in der derzeitigen Sichtweise von Mathematik breiter Konsens.

> *„Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. […] Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende" (Devlin 1998, S. 3–4; Hervorh. im Orig.).*

Allerdings werden die beiden zentralen Begriffe Struktur und Muster oftmals auch alltagssprachlich oder mit unterschiedlichen Bedeutungen verwendet (Lüken 2012; Wittmann & Müller 2008).

Ein „Muster" besteht aus regelmäßig wiederkehrenden Strukturen

Hier werden die beiden Begriffe wie folgt verwendet (Reuter & Wittmann 2015): Die *Struktur* mathematischer Konfigurationen beschreibt deren Aufbau durch ein (inneres) Beziehungsgefüge und seine Eigenschaften; sie gibt an, wie die Teile eines komplexen Ganzen zueinander angeordnet sind. Ein *Muster* liegt vor, wenn innerhalb der Strukturen Regelmäßigkeiten identifiziert werden können, wenn eine spezielle Anordnung von (Teil-) Objekten immer wiederkehrt oder wenn ein Bildungsprinzip zu erkennen ist.

Muster können geometrisch sein – so wird dieser Begriff auch umgangssprachlich verwendet (Karomuster, Streifenmuster, Blümchenmuster etc.). Aber auch Zahlenmuster spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle. Im Bereich der natürlichen Zahlen lassen sich viele Zahlenmuster auch als geometrische Muster darstellen und umgekehrt geometrische Muster durch Zahlenmuster beschreiben – man spricht auch von „figurierten Zahlen" (Steinweg 2006).

- Es gibt Anzahlen, die sich halbieren lassen, und Anzahlen, bei denen dies nicht möglich ist, da immer ein Würfel übrig bleibt (> **Abb. 10**). Fügt man zu letzterem jeweils zwei Würfel hinzu, erhält man wieder eine Anzahl, die sich nicht halbieren lässt. Dem entsprechen die geraden und ungeraden Zahlen sowie das Zählen in Zweierschritten in den ungeraden Zahlen.
- Die Zahlzerlegungen der Fünf können geometrisch dargestellt werden, aber auch mittels Ziffern im Zahlenhaus und als Gleichungen (> **Abb. 11**). Dem geometrischen Muster („immer ein Blaues weniger und ein Graues mehr“) entsprechen die Zahlenmuster („die erste Zahl wird immer um eins kleiner und die zweite um eins größer“). Dies gilt auch für die Zerlegungen der anderen Zahlen.

Insofern kommt geometrischen Mustern, auch für den Zahlbegriffserwerb, eine große Bedeutung zu, da sie den Blick auf Zahlenmuster lenken und auf diese Weise Zahleigenschaften und -beziehungen veranschaulichen können.

Geometrische Muster unterstützen die Zahlbegriffsentwicklung

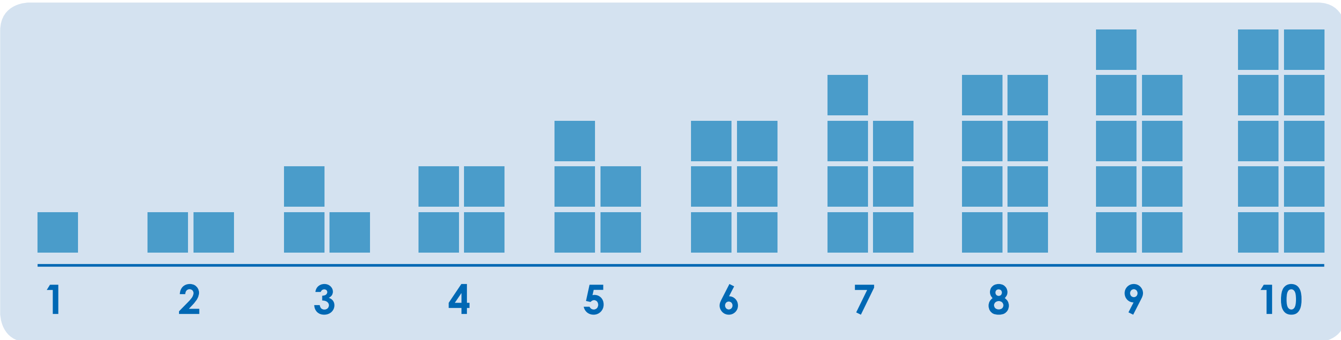


Abbildung 10: Gerade und ungerade Zahlen

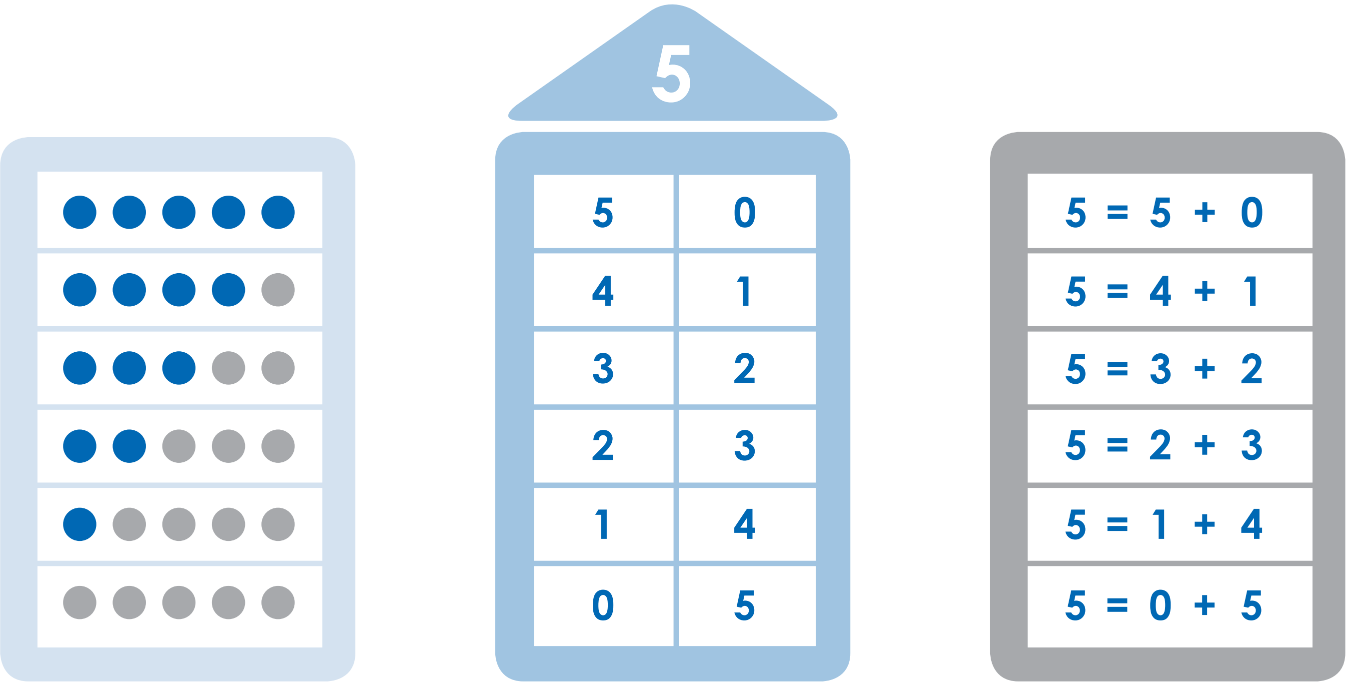
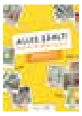


Abbildung 11: Zerlegungen der 5, geometrisch dargestellt mittels Plättchen sowie als Zahlenmuster im Zahlenhaus und als Gleichung

Erkennen von Mustern und Strukturen hängt von der Person ab

Das Erkennen und die Interpretation von Mustern und Strukturen hängen von den individuellen Vorerfahrungen und der aktuellen Aufmerksamkeitsfokussierung der jeweiligen Person ab. Dies hat eine doppelte Konsequenz: Muster (und auch schon Strukturen) sind häufig nicht eindeutig – mehrere Personen können hinter derselben Konfiguration unterschiedliche Muster entdecken. Zudem kann das Entdecken von Mustern und Strukturen prinzipiell nicht erzwungen werden – trotz aller Hinweise kann die Aufmerksamkeitsfokussierung momentan eine andere sein.

MEHR DAZU



PRAXISHEFT
Kap. 3: Kinder erforschen und erkennen Muster und Strukturen

KARTE 3 A Kinder erforschen sichtbare Muster und Strukturen

KARTE 3 B Kinder erleben zeitliche Muster und Strukturen

KARTE 3C Kinder hören, tanzen, singen Muster und Strukturen

2.3.3 Räumliches Vorstellungsvermögen und visuelle Wahrnehmung

In der Vorstellung räumlich sehen und denken können

Als *räumliches Vorstellungsvermögen* (umgangssprachlich oft auch kurz „Raumvorstellung") bezeichnet man die Fähigkeit, sich nicht sichtbare Objekte vorzustellen und in Gedanken damit zu operieren (beispielsweise das gedankliche Auffalten eines Würfels zum Würfelnetz oder das gedankliche Drehen eines Puzzleteils, um zu prüfen, ob es in die Lücke passen könnte). Insbesondere können durch eine aktive Umordnung von im Gedächtnis gespeicherten Vorstellungsbildern auch neue Konstellationen generiert werden (wie das gedankliche Abschneiden einer Ecke einer geometrischen Figur, das gedankliche Zusammensetzen zweier Körper zu einem neuen Körper oder das Sich-Vorstellen eines Bildes an einer leeren Wand oder einer Couch in der Zimmerecke).

Visuelles Gedächtnis als Basis für räumliches Vorstellungsvermögen

Wesentliche Voraussetzungen für das räumliche Vorstellungsvermögen stellen die *visuelle Wahrnehmung* und das daraus resultierende *visuelle Gedächtnis* dar: Nur, wenn eine Person Bilder von Objekten im visuellen Gedächtnis gespeichert hat (sich diese Objekte also vorstellen kann, ohne sie aktuell zu sehen), kann sie auch damit operieren. Das visuelle Gedächtnis wird über das Arbeiten mit sichtbaren Objekten aufgebaut.

Die visuelle Wahrnehmung umfasst unter anderem folgende Teilaspekte (Franke & Reinhold 2016, S. 54–60):

- Die *Figur-Grund-Unterscheidung* bedeutet die Fähigkeit, Figuren vor einem Hintergrund oder eingebettete Teilfiguren einer Gesamtfigur zu erkennen. Gezielt gefordert und gefördert wird sie mit Suchbildern („Wo ist der Ritterhelm versteckt?" – „Im linken Bild sind 10 Fehler. Findest du sie?").

- Die *Wahrnehmung räumlicher Beziehungen und der Raumlage* bezieht sich auf das Erkennen von Formen und ihren typischen Merkmalen sowie auf die Lagebeziehungen von Objekten zueinander. Benötigt wird diese Form der Wahrnehmung zum Beispiel beim Bauen nach Anleitung, beim Puzzeln oder bei Spielen, die eine Zusammensetzung vorgegebener Objekte nach einer bestimmten Vorschrift erfordern (wie „Make ’n’ Break®“ oder „Ubongo®“).
- Die *visuo-motorische Koordination* (auch *Auge-Hand-Koordination*) ist im Kita-Alter speziell beim Ausmalen, Nachzeichnen oder Ausschneiden von Bedeutung, im späteren Alter bei allen ähnlichen handwerklich-praktischen Tätigkeiten.

Mentale Vorstellung von Zahlen erfolgt räumlich

Da das räumliche Vorstellungsvermögen sowohl im Alltag als auch in vielen Berufsfeldern notwendig oder zumindest hilfreich ist, ist es für sich ein Ziel vorschulischen und schulischen Lernens. Empirische Studien zeigen, dass Kinder mit einem höheren räumlichen Vorstellungsvermögen auch bessere Rechenleistungen und sogar generell Mathematikleistungen erbringen (vgl. die Zusammenfassungen bei Grüßing 2012, S. 125−148; Obersteiner 2012, S. 86−107; Franke & Reinhold 2016, S. 80−83). Der Zusammenhang von räumlichem Vorstellungsvermögen und Rechenleistung lässt sich auf der Basis unterschiedlicher Theorien erklären: Sowohl allgemeine Theorien zur Informationsverarbeitung als auch bereichsspezifische Theorien zur Zahlbegriffsentwicklung gehen davon aus, dass die mentale Repräsentation von Zahlen räumlich geschieht, sei es als zweidimensionale Anordnung von Punkten (bei kleineren Zahlen; > **Abb. 6**) oder aufgrund ihrer Verortung am Zahlenstrahl (bei größeren Zahlen; > **Abb. 9**). Räumliches Vorstellungsvermögen und das Operieren mit Zahlen beanspruchen demnach dieselben Bereiche im Gehirn und es laufen jeweils ähnliche mentale Prozesse ab. Es zeigt sich umgekehrt, dass rechenschwache Kinder häufig auch über ein geringes räumliches Vorstellungsvermögen verfügen. Zudem ist plausibel, dass eine nicht-zählende Nutzung von Zahlbildern und der damit gegebenen Strukturen nur erfolgen kann, wenn Kinder über eine entsprechende visuelle Wahrnehmung verfügen: Sie sollen Punktbilder (wieder-)erkennen, ihre Eigenschaften und insbesondere Lagebeziehungen bildungssprachlich beschreiben, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen mehreren Punktbildern erkennen und beschreiben sowie Muster über mehrere Punktbilder hinweg erkennen, beschreiben und fortsetzen können.

Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens im Kita-Alter

Aktuelle Studien belegen, dass auch Kinder im Kita-Alter schon ein räumliches Vorstellungsvermögen besitzen (Lüthje 2010; Maier 2019), es sich also auch in diesem Alter schon entwickeln kann und demnach eine Förderung sinnvoll ist.

MEHR DAZU

PRAXISHEFT
Kap. 2: Kinder entwickeln ein räumliches Vorstellungsvermögen

KARTE 2 A — Kinder entwickeln ein räumliches Vorstellungsvermögen: Formen

KARTE 2 B — Kinder entwickeln ein räumliches Vorstellungsvermögen: Raum-Lage-Beziehungen

2.3.4 Größen und Messen

Eine Größenangabe besteht aus Maßzahl und Maßeinheit

Größenangaben bestehen stets aus einer Maßzahl und einer Maßeinheit. Es kann sich dabei um individuelle, auch körpereigene Maßeinheiten („12 Schritte", „so dick wie 3 Bücher") oder um standardisierte Maßeinheiten („250 Gramm" oder „1,37 Meter") handeln.

Spielerisches Einüben von Maßzahlaspekten und Größenangaben

Im Alltag (Abwiegen von Obst und Gemüse, Bezahlen an der Kasse, …) können Kinder Größenangaben und ihre Bedeutung erleben. Sie sprechen diese nach und ahmen die zugehörigen Handlungen nach (so wie beim „Einkaufen" als Rollenspiel: Abwiegen von Produkten, Verlangen von „zweihundert Gramm" Wurst, Hin- und Hergeben von Geld und Rückgeld beim Bezahlen; beim „Handwerker"-Spielen: Anlegen eines Meterstabs). Meist handelt es sich dabei um in Erinnerung gebliebene Einzelwerte oder um Fantasieprodukte. Häufig wird die Maßzahl alleine genannt, ohne Maßeinheit („Ich wiege sechzehn." oder „Das kostet hundert."). Größenangaben bleiben nicht selten isoliert und sind in den meisten Fällen noch nicht mit tragfähigen Vorstellungen verbunden (etwa wenn im Spiel stets „zweihundert Gramm" verlangt werden, alle Produkte gleich viel kosten oder der gegebene Geldschein geringer ist als der Zahlbetrag und trotzdem noch Rückgeld empfangen wird. Es handelt sich um ein für Rollenspiele charakteristisches „So-tun-als-ob" (Hauser 2016, S. 20–23), ähnlich wenn Kinder einen Text „lesen" oder einen Brief „schreiben" (> **Praxisheft, Kap. 10**). Dabei sammeln Kinder Vorerfahrungen zum Maßzahlaspekt (> **2.2.1**) und zu Größenangaben (Franke & Ruwisch 2010, S. 184–204).

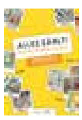
Die einfachste Form des Messens ist der direkte Vergleich

Indirekte Vergleiche können auf verschiedene Arten erfolgen

Während Messen heute üblicherweise mit Messgeräten in Verbindung gebracht wird (wie Küchenwaage, Meterstab oder Maßband), die nicht selten digital sind, lässt sich die ursprüngliche Wortbedeutung als Vergleichen, etwa im Sinne von „Kräftemessen" oder „sich miteinander Messen" beschreiben. Auch hierzu können Kinder schon im Kita-Alter erste Erfahrungen sammeln. Die einfachste Form des Messens stellt ein *direkter Vergleich* dar: Zwei Kinder stellen sich Rücken an Rücken, um zu sehen, wer größer ist; mit einer Kleiderbügelwaage wird geprüft, welcher Gegenstand schwerer ist; ein Blumentopf wird in einen anderen gestellt, um das Volumen zu vergleichen. Wenn ein direkter Vergleich nicht möglich ist, kann ein *indirekter Vergleich* stattfinden, zunächst mit spontan verfügbaren, *nichtstandardisierten* Maßeinheiten: Ein Kind schreitet erst eine Strecke ab und dann eine andere, um festzustellen welche länger ist; die Länge wird hierbei in Schritten, einer körpereigenen Maßeinheit, angegeben; durch Umschüttversuche wird ermittelt, in welches Gefäß mehr Wasser passt, welches also ein größeres Volumen besitzt; als Maßeinheit dient das Volumen eines Plastikbechers, den das Kind gerade zur Hand hat. Ein indirekter Vergleich kann auch mit den bekannten, *standardisierten Maßeinheiten* stattfinden: Die Länge eines Gegenstandes wird durch das Abmessen mit dem Lineal ermittelt; beim Abwiegen mittels einer Balkenwaage wird das Gewicht des Obstes mit jenem der Gewichtsstücke verglichen; das Volumen wird mittels eines Messbechers bestimmt.

Ein Messen als direkter Vergleich ist ferner die Grundlage für ein Ordnen von Objekten der Größe nach (> **2.3.1**).

MEHR DAZU



PRAXISHEFT
Kap. 7: Kinder vergleichen und messen

KARTE 7
Kinder vergleichen und messen

3 ELEMENTARDIDAKTISCHE GRUNDLEGUNG

Lucia Teuscher

Es ist eine zentrale Aufgabe pädagogischer Fachkräfte in Kitas, Kinder im Sinne einer hohen pädagogischen Prozessqualität in ihren Bildungs- und Entwicklungsprozessen zu unterstützen. Der Fokus des vorliegenden Unterstützungsmaterials liegt dabei vor allem auf der entsprechenden Gestaltung der Interaktionsprozesse sowie der räumlich-materiellen Umgebung.

Das folgende Kapitel bietet einen theoriebasierten Überblick über elementardidaktische Grundlagen, wobei an den passenden Stellen Bezüge zum Themenbereich Mathematik hergestellt werden.

3.1 Die Rolle der pädagogischen Fachkraft

Merkmale pädagogischer Qualität in Bezug auf frühe mathematische Bildungsprozesse in Kindertageseinrichtungen

Qualitätsmerkmale der Bildungsumgebung

Bildungsprozesse von Kindern hängen generell von verschiedenen Faktoren ab. Neben den individuellen Voraussetzungen, die jedes Kind mitbringt, sind die Qualitätsmerkmale der Bildungsumgebung im häuslichen Umfeld sowie in der Kindertageseinrichtung relevant (vgl. Steffensky 2017, S. 35).

Damit rücken die Gegebenheiten der Kita in den Blick, die sich ausgehend von Studien pädagogischer Qualität (vgl. z. B. Tietze et al. 2013) in klassische Bereiche unterteilen lassen. Im Fokus steht dabei üblicherweise die pädagogische Prozessqualität. Diese lässt sich in drei Bereiche gliedern (vgl. Pianta und Hamre 2009 zit. nach Steffensky 2017, S. 38):

1. EMOTIONALE UNTERSTÜTZUNG

Vertrauensvolle Beziehungen als Grundlage

Vertrauensvolle Beziehungen sind die Grundlage dafür, dass sich Kinder in einer Umgebung wohl fühlen und sich auf Bildungsprozesse einlassen können. Es ist deshalb eine zentrale Voraussetzung für die pädagogische Qualität in einer Kindertageseinrichtung, dass pädagogische Fachkräfte ihren Fokus von Beginn an auf eine positive Beziehungsgestaltung zum Kind legen.

2. GRUPPENORGANISATION

Materialien und Gleichaltrige

Die pädagogische Fachkraft schafft adäquate Rahmenbedingungen für soziale und kognitive Interaktionsprozesse. Dabei stellt sie **Materialien** bereit und unterstützt **Interaktionen** mit Gleichaltrigen.

3. KOGNITIVE ANREGUNG

Interaktion der Fachkraft mit dem Kind

Zudem steht die **Interaktion der pädagogischen Fachkraft mit dem Kind** im Zentrum, die das Kind dazu anregen soll, sich vertiefend mit einem Sachverhalt auseinanderzusetzen. „Eine vertiefende Auseinandersetzung umfasst zum Beispiel: Fragen stellen, Ideen äußern, sich mit den Ideen, Nachfragen anderer auseinandersetzen und Dinge vergleichen ...“ (Steffensky 2017, S. 39). Die vertiefte Auseinandersetzung zu einem Thema im Gespräch wird auch als „sustained shared thinking“ (länger andauerndes gemeinsames Denken) bezeichnet (Siraj-Blatchford et al. 2002; vgl. Kammermeyer et al. 2017; 2019).

Fragt man nach der pädagogischen Qualität einer Kita, kann man die Prozessqualität jedoch nicht isoliert betrachten. Denn sie hängt maßgeblich von den gegebenen Strukturen in einer Einrichtung, von den Orientierungen der pädagogischen Fachkräfte, den Unterstützungssystemen sowie von weiteren Merkmalen ab (> **Abb. 12**).

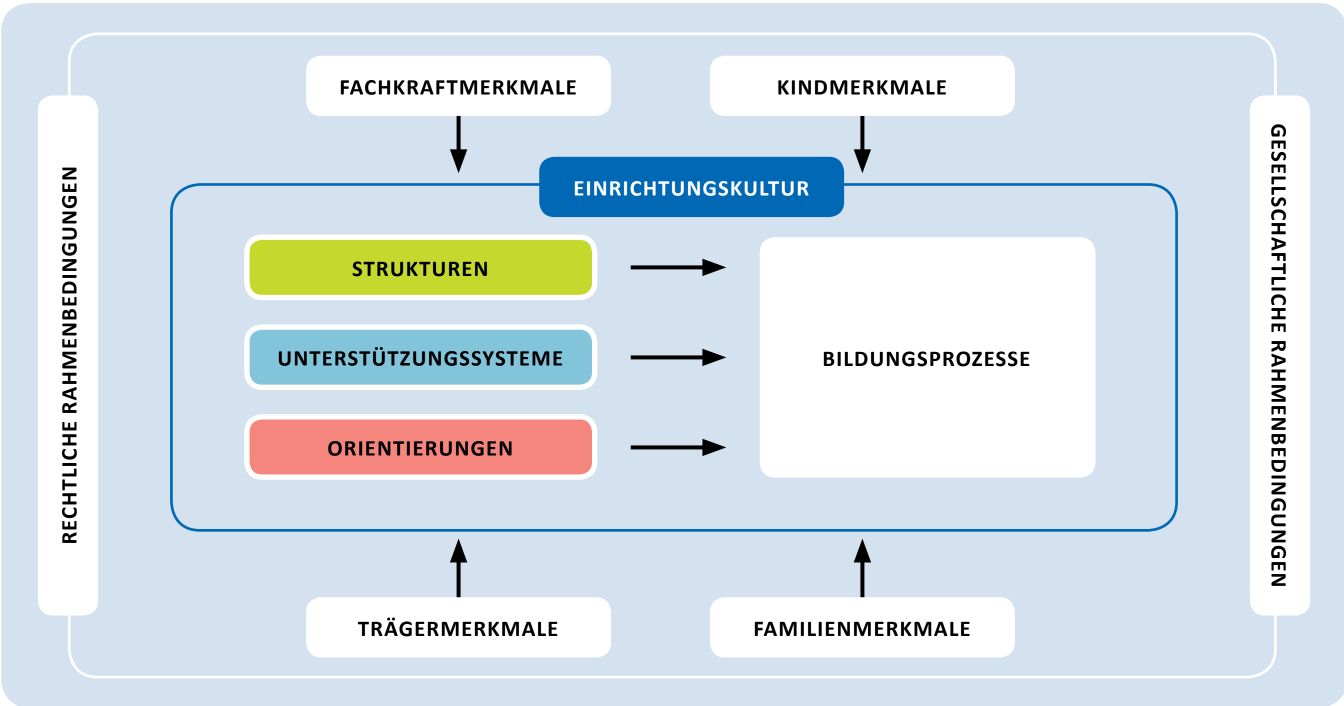


Abbildung 12: Einflussfaktoren auf Bildungsprozesse (in Anlehnung an Teuscher 2017)

Merkmale der Einrichtungskultur

Unter **STRUKTUREN** sind Abläufe, Rituale und räumliche sowie materielle Bedingungen zu verstehen, die (mathematische) Bildungsprozesse in Kindertageseinrichtungen ermöglichen. Dabei stellt sich auch die Frage, ob (spezifische) Beobachtungsinstrumente vorliegen und wie diese gehandhabt werden.

UNTERSTÜTZUNGSSYSTEME bezeichnen die Zusammenarbeit des Teams, die Unterstützung durch die Leitung und den Träger sowie die Möglichkeit themenspezifischer Fort- und Weiterbildung, Beratung durch externe Spezialistinnen und Spezialisten o.ä.

ORIENTIERUNGEN beziehen sich auf die Einstellungen der einzelnen Fachkräfte sowie des gesamten Teams und umfassen die Vorstellungen und Überzeugungen, die dem jeweiligen pädagogischen Handeln zugrunde liegen. Entsprechend ist damit auch die Verankerung des Themenbereichs Mathematik in der Konzeption der Kita gemeint. Auch die Ausrichtung der pädagogischen Arbeit an einem spezifischen Programm oder einer pädagogischen Richtung ist dem Bereich der Orientierungen zuzuordnen.

Neben diesen einrichtungsspezifischen Merkmalen haben auch *Kind- und Familienmerkmale* einen Einfluss auf die individuellen Bildungsprozesse der Kinder. Dabei handelt es sich einerseits um die individuellen Voraussetzungen des Kindes, wie beispielsweise sein Geschlecht, sein Alter sowie seine Interessen und Fähigkeiten. Andererseits sind familiäre Bedingungen, wie die Familiensprache(n) oder der jeweilige sozioökonomische Hintergrund, erfasst.

Kind- und Familienmerkmale

Zudem sind *Fachkraftmerkmale* bedeutsam. Darunter sind beispielsweise Alter, Geschlecht, (Aus-)Bildungshintergrund oder fachspezifische Kompetenzen der einzelnen Teammitglieder einer Kita zu verstehen.

Fachkraftmerkmale

Trägermerkmale beziehen sich auf Organisationsform und Strukturen des Trägers sowie auf weitere Ressourcen, wie beispielsweise die Verfügbarkeit einer Fachberatung oder ein fundiertes Qualitätsmanagement.

Unterstützung durch den Träger

Merkmale in Bezug auf den weiteren Kontext umfassen in diesem Modell die *rechtlichen Rahmenbedingungen*. Mit Blick auf die spezifischen Themenbereiche ist dabei folglich relevant, welche Inhalte und Ziele durch den Orientierungsplan gegeben sind. Weiter sind *gesellschaftliche Rahmenbedingungen* bedeutsam. Es stellt sich dabei zum Beispiel die Frage, welche gesellschaftliche Relevanz dem hier betrachteten Themenbereich der frühen mathematischen Bildung zukommt.

Rechtliche und gesellschaftliche Rahmenbedingungen

3.2 Methoden und pädagogisches Handeln

Kindliche Denkprozesse anregen

Wenngleich die emotionale Unterstützung und die Gruppenorganisation durch die pädagogische Fachkraft zweifelsohne grundlegende und übergreifende Merkmale pädagogischer Prozessqualität sind, wird an dieser Stelle nicht weiter auf diese Aspekte eingegangen. Denn für das vorliegende Unterstützungsmaterial ist vor allem die Frage interessant, wie mathematische Bildungsprozesse herausgefordert und begleitet werden können. Damit rückt vor allem die Frage nach den kognitiven Aktivierungen ins Zentrum.

Die pädagogische Fachkraft ist dabei gefordert, die Kinder in ihren Bildungsprozessen anzuregen, herausfordernde Impulse zu setzen und kindliche Denkprozesse zu begleiten. Wie Untersuchungen zeigen, gibt es bezüglich der Anregungsqualität in vielen Kitas generell noch großes Entwicklungspotenzial (z.B. Kammermeyer et al. 2016; Wertfein et al. 2015).

Welches methodische Vorgehen fordert mathematische Bildungsprozesse also heraus und bietet zudem den jeweils notwendigen Rahmen?

3.2.1 Lehrgänge, (Förder-)Programme und klassische Angebotspädagogik

Unter Lehrgängen und (Förder-)Programmen sind diejenigen Materialien zu verstehen, die als geschlossene Handlungskonzepte umzusetzen sind. Dabei sind häufig Handreichungen beigefügt, die klare Vorgaben über die Anwendungsweise, den Einsatz und die Zielgruppe geben. Die jeweiligen Materialien können auch in den Kita-Alltag integriert werden. Es wird jedoch häufig der Einsatz im Rahmen eines spezifischen Angebots mit einer altershomogenen (Klein-)Gruppe empfohlen (vgl. Schuler 2013, S. 79).

Geschlossene Handlungskonzepte

Die klassische Angebotspädagogik

Auch in der klassischen Angebotspädagogik geht es um eine stark angeleitete instruierende Beschäftigung. Bestimmte Aktivitäten werden kleinschrittig vorgegeben, entscheidend ist nicht der Prozess, sondern das Endprodukt. So werden beispielsweise im Zuge eines Bastelangebots von einer Kindergruppe identische Sterne zu Weihnachten gebastelt. Individuelle kreative Abweichungen sind nicht erwünscht. Die Kinder gehen also bei diesen beiden Ansätzen nach einem Plan vor, der durch die pädagogische Fachkraft vorgegeben wird (vgl. Fuchs 2014, S. 57).

Ausgangspunkt: „Was will, braucht und kann das Kind?“

Generell sind die kindlichen Vorerfahrungen und Fähigkeiten in allen Bildungsbereichen heterogen. Dies trifft auch auf den mathematischen Bereich zu (vgl. Bruns 2014). Aus diesem Grund sollten zunächst jedem Kind individuelle und passgenaue Anregungen, auf der Basis des jeweiligen Entwicklungsstandes und mit Blick auf die „Zone der nächsten Entwicklung“ (Vygotsky 1978, S. 84 ff.), gegeben werden. Im Einzelfall können auch begründete Angebote Kindern sinnvolle Impulse geben und Bildungsprozesse anstoßen, sofern sie in ein kindorientiertes pädagogisches Handeln im Sinne einer individuellen kognitiven Aktivierung eingebettet sind (> **Kap. 3.1**). Dabei stellt eine differenzierte Auseinandersetzung mit den Leitfragen des Orientierungsplans „Was will, braucht und kann das Kind?“ (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg 2014, > **Kap. 1**) den Ausgangspunkt für das entsprechend zielgerichtete pädagogische Handeln dar.

Gezielte Förderung für einzelne Kinder?

Für einzelne Kinder kann auch eine gezielte **Förderung** notwendig sein, die mit Hilfe eines Förderprogramms durchgeführt werden kann. Dieses muss jedoch maximal begründet und sinnvoll in den gesamten pädagogischen Kontext eingebunden sein. Zudem können Programme nicht allein für das pädagogische Handeln in einem bestimmten Bildungsbereich stehen. Für den Bereich der mathematischen Bildung ist ein unspezifischer Einsatz von Trainingsprogrammen für alle Kinder wenig zielführend (> **Kap. 2.1**).

3.2.2 Kindorientiertes pädagogisches Handeln im Alltag

Balance zwischen Konstruktion und Instruktion

Bildung ist immer Selbstbildung – Kinder können also grundsätzlich nicht gebildet werden! Dennoch braucht das Kind in seinem Bildungsprozess Anregungen und Herausforderungen, emotionale und kognitive Unterstützung durch Erwachsene, die auf förderliche Rahmenbedingungen achten. Das „aktive“ und sich selbst bildende Kind geht also nicht automatisch mit einer passiven pädagogischen Fachkraft einher. Konstruktion und Instruktion stehen einander nicht entgegen (vgl. dazu Steffensky 2017, S. 42). Die Kinder benötigen vielmehr pädagogische Fachkräfte, die eine aktive Auseinandersetzung mit Mathematik herausfordern und ermöglichen.

Stellenwert von Alltagssituationen

Alltagssituationen, die für die Kinder von Bedeutung sind, ermöglichen wirksame Lernerfahrungen. Es stellt sich die Frage, wie Situationen, die für Kinder bedeutsam sind und gleichzeitig ein hohes Bildungspotenzial aufweisen, im Alltag genutzt werden können.

3.2.3 Nutzen von Alltagssituationen

Beim Nutzen von Alltagssituationen steht das **situative Handeln** im Vordergrund. Es handelt sich also um *„(...) Reaktionen der Erzieherin auf das, was Kinder beschäftigt, wie und wofür sie sich engagieren“* (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg 2014, S. 102).

Kinder in Kindertageseinrichtungen gehen häufig Aktivitäten nach, die mathematisches Potenzial aufweisen – z. B. im Freispiel, innerhalb von Ritualen, durch die Nutzung vorhandener Materialien und Spiele. Mathematik ist dabei Gegenstand und Thema des Alltags, und zwar von klein auf.

Dennoch weisen Untersuchungen darauf hin, dass Kinder ohne Impulse von pädagogischen Fachkräften sehr selten Zahlen benutzen oder mathematische Fähigkeiten anwenden (Young-Loveridge, Carr und Peters 1998, Gifford 2005, zit. nach Lorenz 2012, S. 100).

Diese Erkenntnisse zeigen, dass das mathematische Potenzial eines Spiels, eines Materials oder einer Situation allein nicht ausreichend ist. Bedeutsam ist, dass die pädagogische Fachkraft das jeweilige Potenzial erkennt und gegebenenfalls passgenaue Impulse gibt, damit Lerngelegenheiten entstehen (Schuler 2013, S. 92).

Impulse oft nötig, damit mathematisches Potenzial genutzt wird

Auch aus sozialkonstruktivistischer Perspektive wird angenommen, dass Bildungsprozesse im Rahmen von Interaktionsprozessen ablaufen. „Es hängt also in erheblichem Maß von der pädagogischen Einbindung und somit von der pädagogischen Fachkraft oder einer anderen begleitenden Person ab, welche Rolle dem Spiel(material) in der Interaktion zugewiesen wird“ (Benz et al. 2015, S. 43).

SITUATIVES PÄDAGOGISCHES HANDELN

Es ist erforderlich, dass eine pädagogische Fachkraft **Potenzial** in einer alltäglichen Spielsituation erkennt und an den richtigen Stellen **geeignete Impulse in Form von Interaktionen und / oder Materialien** setzt, die mathematische Bildungsprozesse herausfordern und voranbringen.

3.2.4 Schaffen spezifischer Lerngelegenheiten im Alltag

Neben der beschriebenen Nutzung von Alltagssituationen planen und schaffen pädagogische Fachkräfte zudem spezifische Lernsituationen. Ziel dabei ist eine breite Förderung aller Kinder im Kita-Alltag. Im Unterschied zur Nutzung von Alltagssituationen bringt die pädagogische Fachkraft hier aktiv themenspezifische Impulse ein. Zentral ist, dass diese Impulse nicht an den Kindern vorbeigehen, weshalb die Fragen des Orientierungsplans *„Was will das Kind? Was braucht das Kind? Was kann das Kind?“* (Orientierungsplan, Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg 2014) handlungsleitend sind und die Planung auf entsprechenden Beobachtungen beruht.

Schaffen spezifischer Lernsituationen

Ein Impuls durch eine pädagogische Fachkraft kann also aus dem beobachteten Interesse eines oder mehrerer Kinder hervorgehen. Er kann aber auch aus der Feststellung resultieren, dass dieser spezifische Impuls sinnvoll ist, da er einem Kind oder einer Kindergruppe ein neues Thema oder einen nächsten Entwicklungsschritt eröffnet.

Interessen der Kinder geben Anlass für Impulse

Im Unterschied zu Förderprogrammen oder geschlossenen Angeboten ist das Thema eines solchen Impulses explizit an den Bedürfnissen und Interessen eines Kindes oder mehrerer Kinder orientiert. Zudem ist der weitere Prozess offen und wird gemeinsam mit dem Kind oder den Kindern gestaltet und weiterentwickelt.

Anschaffung spezifischer didaktischer Materialien nicht nötig

Dabei werden Materialien verwendet, die in Kindertageseinrichtungen üblicherweise vorhanden sind – also Alltagsmaterialien. Eine Anschaffung spezifischer didaktischer Materialien ist daher nicht notwendig (vgl. Schuler 2013).

GEPLANTES PÄDAGOGISCHES HANDELN

Es ist zu empfehlen, dass Fachkräfte ausgehend von spezifischer Beobachtung und Dokumentation **gezielte Lerngelegenheiten schaffen und Impulse geben, um Bildungsprozesse herauszufordern oder voranzubringen**. Dafür kommen beispielsweise der Einsatz **spezifischer Methoden** oder bestimmter **Materialien** sowie eine gezielte Gestaltung von **Interaktionssituationen** in Betracht.

3.3 Praxisbeispiele: Projekte und Angebote im Sozialraum

Zahlreiche Ideen und Hinweise zur Nutzung von Alltagssituationen sowie zum Schaffen spezifischer Lerngelegenheiten im Alltag finden sich auf den Impulskarten zu diesem Unterstützungsmaterial. Neben Einzelsituationen planen pädagogische Fachkräfte auch häufig Projekte gemeinsam mit Kindern oder nutzen Angebote im Sozialraum. Entsprechend wird hier ein konkretes Projektbeispiel vorgestellt (> **Kap. 3.3.1**) sowie ein Beispiel eines Angebots im Sozialraum (> **Kap. 3.3.2**).

3.3.1 Projekte mit Kindern gestalten

Merkmale eines Projekts

Projekte bieten Kindern und pädagogischen Fachkräften die Möglichkeit, sich über einen längeren Zeitraum intensiv mit einem Thema zu beschäftigen. Dabei ist es wichtig, das Interesse der Kinder in den Mittelpunkt zu stellen, die Kinder an der Themenfindung, der Planung und der Durchführung zu beteiligen und das Thema mit allen Sinnen gemeinsam zu erkunden. Folgende Merkmale zeichnen ein Projekt aus:

- **Projektmerkmal 1:** Die Themenauswahl orientiert sich an den Interessen der Kinder.
- **Projektmerkmal 2:** Die Projektarbeit ist zielorientiert.
- **Projektmerkmal 3:** Es werden unterschiedliche Bildungsbereiche und Disziplinen miteinander verknüpft.
- **Projektmerkmal 4:** Die Projektplanung orientiert sich an den Reaktionen und Ideen der Kinder.
- **Projektmerkmal 5:** Es werden unterschiedliche Sinne angesprochen.
- **Projektmerkmal 6:** Die Kinder lösen Aufgaben im Projekt gemeinschaftlich. Dadurch kommt in der Projektarbeit dem sozialen Lernen eine hohe Bedeutung zu.
- **Projektmerkmal 7:** Projekte haben immer einen Anfang und ein Ende.

(in Anlehnung an Gudjons 2001)

EIN FORMENPROJEKT AUS DEM ELEMENT-I KINDERHAUS WIKI

Ein Beitrag in Zusammenarbeit mit Lena Ehm

Projektmerkmal 1: Die Themenauswahl orientiert sich an den Interessen der Kinder.

Die Fachkräfte beobachteten, dass die Kinder sich im Freispiel interessiert mit Formen beschäftigten. Sie malten Mandalas oder zeichneten Bilder, die nur aus Kreisen und Dreiecken bestanden. Daraufhin wurde beschlossen, ein Formenprojekt zu starten.

Abbildung 13: Die Kinder beschäftigen sich im Freispiel mit Formen

Projektmerkmal 2: Die Projektarbeit ist zielorientiert.

Im Formenprojekt wurden folgende **Ziele** verfolgt:

ZIEL 1 Die Kinder kennen Fachbegriffe zu den Formen und deren Merkmalen.

ZIEL 2 Die Kinder erkennen Formen mit unterschiedlichen Sinnen und in unterschiedlichen Kontexten.

ZIEL 3 Die Kinder stellen Formen her und beachten dabei die entsprechenden Merkmale.

Projektmerkmal 3: Es werden unterschiedliche Bildungsbereiche und Disziplinen miteinander verknüpft – hier: Kunst.

In der täglich stattfindenden Kinderkonferenz wurde der erste Impuls gegeben. Dabei wurden Bilder von Miro und Kandinsky gezeigt. Zunächst wollten vier Kinder sich die Bilder genauer anschauen.

Abbildung 14: „Composition 8" von Wassily Kandinksy

Die Kinder beschrieben, was sie sahen: *„Roboter, Roboter mit einem Dreieck als Fuß, laufende Weinflasche, Regenschirm, Knöpfe, Dreieck, Kugel, Kreise, Anker, Auge, Viereck, Mond, Strich…"*

Der Fokus wurde schließlich auf die Formen **Dreieck**, **Quadrat**, **Kreis** und **Rechteck** gelegt. Die Kinder wurden gefragt, wie sie die einzelnen Formen beschreiben würden: Mit den Zeigefingern und Daumen formten die Kinder Dreiecke – „Es hat drei Ecken…". Es gelang den Kindern in kürzester Zeit, die **Merkmale der Formen herauszufiltern**.

In diesem Schritt wurde **ZIEL 1** verfolgt: Die Kinder kennen Fachbegriffe zu den Formen und deren Merkmalen.

Projektmerkmal 4: Die Projektplanung orientiert sich an den Reaktionen und Ideen der Kinder.

- Viele Formen lagen ausgebreitet auf dem Tisch. So lange die Musik spielte, liefen die Kinder um den Tisch. Sobald sie verstummte, wurde eine Form benannt und die Kinder versuchten, diese möglichst schnell vom Tisch zu schnappen und in die Luft zu halten.
- Beim Aufräumen der Formen fiel der Blick eines Kindes auf einen Muggelstein. Es sagte: *„Der Muggelstein ist auch ein Kreis*!" Das motivierte die Kinder, das ganze Zimmer nach Formen zu durchsuchen. Die Fenster, ein Namenschild, das Geobrett, die Steckperlen und vieles mehr. Kurzerhand wurden die Dinge mit der gleichen Form zusammengelegt. Die Kinder stellten dabei fest, dass die Form eines Dreiecks nur schwer zu finden war.

- Dieser Impuls der Kinder wurde aufgegriffen und führte zum nächsten Projektimpuls: „Formendetektive". Die „Formendetektive" begaben sich auf Formensuche im Kinderhaus: Überall entdeckten die Kinder Formen und machten Fotos davon. Manchmal wurden sogar zwei Formen in einem Gegenstand entdeckt, wie z. B. bei der Steckdose. Bei den Formen, die sich nur schwer finden ließen, halfen die Kinder einfach ein bisschen nach, indem sie ihren Finger als Grenze dazu legten.

Außerdem wird **ZIEL 2** einbezogen: Die Kinder erkennen Formen mit unterschiedlichen Sinnen und in unterschiedlichen Kontexten.

Projektmerkmal 5: Es werden unterschiedliche Sinne angesprochen.

Formen haptisch erkennen:

- Es wurde ein großer Sack mitgebracht. Einzeln steckten die Kinder die Hand in den Sack und befühlten den Inhalt. Sie wurden dazu angeregt, zu beschreiben, was sie fühlten: „*Etwas Spitzes*", „*Etwas Großes*", „*Etwas Plattes – nee, etwas Rundes*". Die vorher erkannten Merkmale der verschiedenen Formen wurden den Kindern ins Gedächtnis gerufen. Jedes Kind überlegte sich eine Form und versuchte sie mit der Hand im großen Sack zu erfühlen.

Auch dieser Schritt bezieht sich auf **ZIEL 2**: Die Kinder erkennen Formen mit unterschiedlichen Sinnen und in unterschiedlichen Kontexten.

Projektmerkmal 6: Die Kinder lösen Aufgaben im Projekt gemeinschaftlich. Dadurch kommt in der Projektarbeit dem sozialen Lernen eine hohe Bedeutung zu.

- Formen zeichnen: Jedes Kind durfte sich eine Form nehmen und sie anschließend auf ein weißes Blatt Papier zeichnen. Manche Kinder zeichneten die Form frei, andere wollten lieber eine fertige Form als Schablone benutzen.

- Formen kleben: Die Kinder bekamen eine Rolle Malerkrepp in die Hand. Der Auftrag lautete: „*Klebe mit vielen Streifen des Klebebands deine Lieblingsform an die Wand*." Sie dachten kurz über die Formen nach und klebten los. Ein paar Kinder entschieden sich für das Rechteck, andere für das Dreieck und ein Kind entschied sich für den Kreis.

- Sich in Formen verwandeln: Nach kurzer Ratlosigkeit begann ein Kind und wollte sich zu einem Kreis legen. Kritisch wurde es von einem anderen Kind beobachtet. Dieses sagte: „*Nee, da fehlt noch ein Stück*", und legte sich dazu. Ein weiteres Kind bemerkte: „*Das ist auch kein Kreis*." Es legte sich ebenfalls dazu, und mit ein bisschen Schieben und Rücken lag bald ein Kreis aus drei Kindern auf dem Boden.

Das war das Aha-Erlebnis für den Rest der Gruppe. Zusammen legten sie sich zu einem großen Kreis. Auch das Rechteck, das Quadrat und das Dreieck wurden häufig nachgeformt. Es haben sich immer wieder Kleingruppen gefunden, die eine Form darstellen wollten. Es stellte sich heraus, dass das gar nicht so einfach war. Die Kinder haben diskutiert und sich beratschlagt und wenn nötig nach Hilfe gefragt. Doch mit der Zeit entstanden alle Formen auf unterschiedlichste Art und Weise.

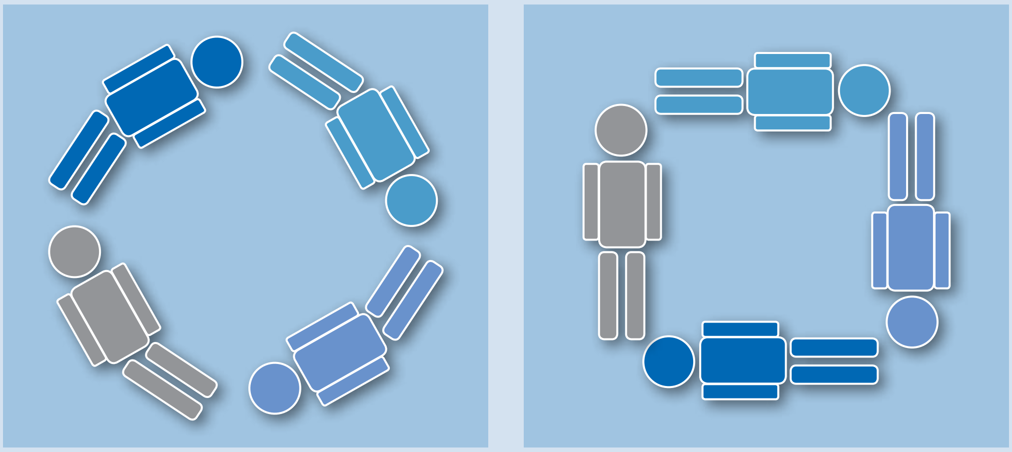


Abb. 15: Die Kinder liegen auf dem Boden und stellen Formen mit ihren Körpern dar.

Die Kinder sind gefordert, sich an die Merkmale der Formen zu erinnern. Es werden unterschiedliche Sinne und Bildungsbereiche angesprochen. Durch die aktive Auseinandersetzung festigen sich die Merkmale und Begriffe der Formen.

Die Kinder zeichnen und kleben Formen. Außerdem legen sie diese mit dem eigenen Körper. Es wird dabei **ZIEL 3** verfolgt: Die Kinder stellen Formen her und beachten dabei die entsprechenden Merkmale.

Projektmerkmal 7: *Projekte haben immer einen Anfang und ein Ende.*

Das Formenprojekt sollte so enden, wie es begonnen hatte, nämlich mit Kunst. Dazu haben die Kinder weiße Blätter mit Wasserfarben angemalt. Ob einfarbig oder bunt spielte dabei keine Rolle. Nachdem die Farbe getrocknet war, legten sie die Blätter mit der bemalten Seite auf den Tisch und zeichneten auf die Rückseite Dreiecke, Quadrate, Rechtecke und Kreise. Anschließend schnitten die Kinder ihre Formen aus. So entschied der Zufall, welche Form welche Farbe bekam. Zum Schluss nahm jedes Kind einige seiner Formen in die Hand und ließ sie auf ein weißes Papier fallen. Wieder entschied der Zufall, welche Form wo landete. Genau dort wurden die Formen dann auch aufgeklebt, wodurch ein Zufallsbild entstand. Die Kunstwerke wurden auf dem Marktplatz aufgestellt. Auch die anderen Kinder, die nicht am Projekt teilgenommen hatten, bestaunten die Werke. Die Projektkinder erklärten in den nächsten Tagen immer wieder einmal die Formen und zeigten stolz ihre Bilder.

In dieser kreativen Auseinandersetzung wird auch **ZIEL 2** erfüllt: Die Kinder erkennen Formen mit unterschiedlichen Sinnen und in unterschiedlichen Kontexten.

3.3.2 Angebote im Sozialraum nutzen

Neben den Aktivitäten, die in den Räumen der Kita stattfinden und sich auf das Team und die Kinder der Kita beschränken, ist es sinnvoll, Ressourcen im sozialen Umfeld ausfindig zu machen und zu nutzen. Unterschiedlichste Organisationen, Expertinnen und Experten können sich als gewinnbringende Netzwerkpartner und -partnerinnen erweisen und dem Team sowie den Kindern neue Impulse für mathematische Bildungsprozesse bieten.

Das Forschungs- und Entwicklungsprojekt **„MiniMa – Minis und Erwachsene entdecken Mathematik“** bietet Besuche von Kita-Gruppen in der „MachmitWerkstatt MiniMa“ sowie begleitende Workshops für pädagogische Fachkräfte an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe an. Es handelt sich also um ein bestehendes Angebot, das von Kitas genutzt werden kann.

Weitere Informationen: https://www.ph-karlsruhe.de/projekte/minima

---

DAS FORSCHUNGS- UND ENTWICKLUNGSPROJEKT „MINIMA – MINIS UND ERWACHSENE ENTDECKEN MATHEMATIK“

Ein Beitrag in Zusammenarbeit mit Tina Armbruster, Alisa Merkel und Jil Winandy

> *„(…) dass der Umgang mit Zahlen, Formen, Mustern und Größen wie Längen, Gewichten und Zeiten das sehr junge Kind schon begleitet, es fasziniert und beschäftigt, ist zentrale Einsicht und Ausgangspunkt des pädagogischen Bemühens …“ (Lorenz, 2012, S. 11).*

MiniMa: Projekt zum Aufbau mathematischer Kompetenzen

Die von Lorenz beschriebene Begeisterung und Faszination für frühe mathematische Begegnungen soll im Rahmen des von der pädagogischen Hochschule Karlsruhe durchgeführten Forschungs- und Entwicklungsprojekts „Minis und Erwachsene entdecken Mathematik“ (kurz: MiniMa) in Kindern wie auch den Erwachsenen geweckt werden (vgl. Benz 2012, S. 19; Benz & Zöllner 2018, S. 22). In dem Forschungsprojekt stehen ebenso die Professionalisierung sowie die Kooperation von pädagogischen Fachkräften, Lehrkräften der Schuleingangsstufe und Lehrenden und Studierenden der pädagogischen Hochschule im Vordergrund. Workshops für Lernbegleiterinnen und Lernbegleiter in Kombination mit Besuchen mit der Kindergruppe in der „MachmitWerkstatt MiniMa“ und intensive Reflexionen bieten einerseits die optimale Grundlage für den Aufbau mathematischer Fachkompetenz, Handlungskompetenz und Reflexionskompetenz bei den Erwachsenen. Andererseits wird die Begeisterung der Fachkräfte und der Kinder für mathematische Entdeckungen geweckt.

Wie läuft die MiniMa für die pädagogischen Fachkräfte genau ab?

Für die Fachkräfte bietet das Forschungsprojekt MiniMa eine Fortbildung, welche sich in drei Teile gliedert.

1 Workshop an der Pädagogischen Hochschule

Fachkompetenz erwerben

Die Workshops finden zwei Mal im Jahr zu wechselnden Themen der frühen mathematischen Bildung statt. Gemeinsam wird fachdidaktisches Wissen erarbeitet, welches die Grundlage für eine professionelle Haltung bietet. Darauf aufbauend werden mathematische Spiel- und Erkundungsumgebungen geplant und Lernchancen erarbeitet. Neben fachlichen Kompetenzen werden hier auch praktische Kompetenzen, wie beispielsweise das Einsetzen geeigneter Impulsfragen, diskutiert. Der Fokus des Workshops liegt vor allem auf dem Erwerb der **Fachkompetenz**.

2 Besuch der MachmitWerkstatt mit den Kindern

Handlungskompetenz durch Beobachtung und Erprobung entwickeln

Hier besuchen die Fachkräfte gemeinsam mit einer Gruppe von Kindern die Werkstatt an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe. Studierende gestalten eine Lernumgebung zu dem im Workshop erarbeiteten Inhaltsbereich, in welchem die Kinder mathematische Inhalte entdecken, erarbeiten und reflektieren können. Bei dem Besuch der MachmitWerkstatt steht vor allem die **Handlungskompetenz** im Fokus. Die Fachkräfte können sich dabei sowohl selbst ausprobieren, als auch das Handeln der Studierenden mit der Kindergruppe beobachten und daraus Ideen und Handlungsimpulse generieren.

3 Reflexionstreffen

Diagnose- und Reflexionskompetenz weiterentwickeln

Gemeinsam mit den Dozierenden und Studierenden werden Denk- und Vorgehensweisen der Kinder analysiert. Sowohl das eigene professionelle Handeln als auch die mathematischen Prozesse der Kinder werden in einer diagnostisch-reflexiven Haltung hinterfragt und erweitert. Im gemeinsamen Austausch werden zudem Ideen für die weitere Planung und Umsetzung von mathematischen Erkundungsumgebungen im pädagogischen Alltag erarbeitet. Dabei steht der Erwerb von **Diagnose- und Reflexionskompetenz** im Fokus.

Stimmen pädagogischer Fachkräfte:

> *„Also mich fasziniert, wie viele Alltagsmaterialen in der MachmitWerkstatt sind oder wie viel Mathematik-Inhalt auch im Alltag steckt (…) man braucht gar kein Programm, sondern es ist ja alles um uns herum, das finde ich faszinierend."*
> **Pädagogische Fachkraft einer Kita aus dem Stadtgebiet Karlsruhe**

> *„Mir geht es jedes Mal gut, wenn ich hier bin. Ich krieg immer neue Erfahrungen mit, neue Impulse für den Kindergarten."*
> **Pädagogische Fachkraft einer Kita aus dem Stadtgebiet Karlsruhe**

Wie läuft die MiniMa für Studierende genau ab?

Projektpraktikum im Rahmen der MiniMa

Die Studierenden des Studiengangs *Pädagogik der Kindheit* der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe haben die Möglichkeit, ihr Projektpraktikum im Rahmen der MiniMa zu absolvieren.

Vor Beginn des Praktikums besuchen die Studierenden gemeinsam mit den pädagogischen Fachkräften den **Workshop** (s. o. Teil 1). Dieser Workshop hilft den Studierenden dabei, sich mit den fachdidaktischen Grundlagen, den Materialien und deren Lernchancen zum ausgewählten Themenbereich auseinanderzusetzen und diese zusammen mit den pädagogischen Fachkräften und den anderen Studierenden kritisch zu betrachten.

Auf Grundlage des Workshops planen sie Lerngelegenheiten und Impulse für die Kinder und setzen diese schließlich in der MachmitWerkstatt (Teil 2) gemeinsam mit den Kindern und Fachkräften um.

Die Vorbereitung und Durchführung der Lernumgebung in der MachmitWerkstatt wird im Rahmen der Begleitseminare an der Hochschule gemeinsam reflektiert (Teil 3). Dabei wird auch auf Videomaterial zurückgegriffen, das im Rahmen der Arbeit in der MachmitWerkstatt entsteht.

Abbildung 16: Impressionen aus der MiniMa-„MachmitWerkstatt"

Stimmen ehemaliger Studierenden:

„Die intensiven Reflexionen nach der MachmitWerkstatt mit den Kindern und pädagogischen Fachkräften haben mir geholfen, mein eigenes Handeln kritisch zu betrachten. Die Erfahrungen im Umgang mit den Kindern kann ich auf so viele andere pädagogische Situationen übertragen."
Ehemalige Studentin aus der MiniMa

„Durch die konkrete Umsetzung und die Reflexion entwickelt man ein Gespür dafür, wie man den Kindern Impulsfragen stellen kann. Hilfreich war auch die Erfahrung in der Zusammenarbeit in einem Team. Wir haben uns bei der Planung gegenseitig geholfen und die Durchführungen gemeinsam vorbesprochen und reflektiert."
Ehemalige Studentin aus der MiniMa

„Mit den Kindern direkt zu arbeiten, ist eine ganz andere Situation, als sich alles nur in der Theorie zu überlegen. Ich konnte gemeinsam die Mathematik mit den Kindern quasi neu entdecken. Das hat mir richtig Spaß gemacht, obwohl meine eigenen Erfahrungen im Mathematikunterricht nicht immer positiv waren. Und jetzt mittlerweile hat man ein Gespür für jede auch nur kleinste mathematische Situation, bei der andere nicht einmal denken würden, dass dahinter Mathe steckt."
Ehemalige Studentin aus der MiniMa

Literatur zu 2 FRÜHES MATHEMATIKLERNEN

Aster, M. von & Lorenz, J. H. (2013) (Hrsg.). Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik (2. überarb. u. erw. Aufl.). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Benz, C. (2010). Minis entdecken Mathematik. Braunschweig: Westermann.

Benz, C., Peter-Koop, A., Grüßing, M. (2015). Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Devlin, K. (1998). Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Dornheim, D. (2008). Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten. Berlin: Logos.

Edelmann, D. (2011). Frühkindliche Bildung von Kindern mit Migrationshintergrund. In M. Matzner (Hrsg.), Handbuch Migration und Bildung (S. 182–196). Weinheim: Beltz.

Fölling-Albers, M. (2013). Erziehungswissenschaft und frühkindliche Bildung. In M. Stamm & D. Edelmann (Hrsg.), Handbuch frühkindliche Bildungsforschung (S. 37–49). Wiesbaden: Springer.

Freudenthal, H. (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. Grundschule 14 (4), S. 140–142.

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie in der Grundschule (3. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Fritz, A. & Ricken, G. (2008). Rechenschwäche. Stuttgart: UTB.

Fritz, A. & Ricken, G. (2009). Grundlagen des Förderkonzeptes „Kalkulie". In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie (2. überarb. Aufl., S. 374–395). Weinheim: Beltz.

Fuson, K. C. (1988). Children's Counting and Concepts of Number. New York: Springer.

Gaidoschik, M. (2017). Zur Rolle des Unterrichts bei der Verfestigung des zählenden Rechnens. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie (3. überarb. Aufl., S. 111–125). Weinheim: Beltz.

Gaidoschik, M. (2018). Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis (10. Aufl.). Hamburg: Persen.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2000). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Online verfügbar unter https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/deliver/index/docId/16/file/gerster.pdf [14.10.2019].

Gasteiger, H. (2017). Frühe mathematische Bildung – sachgerecht, kindgemäß, anschlussfähig. In S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule (S. 9–26). Berlin: Springer Spektrum.

Grüßing, M. (2012). Räumliche Fähigkeiten und Mathematikleistung. Eine empirische Studie mit Kindern im 4. Schuljahr. Münster: Waxmann.

Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2007). Mathematische Frühförderung – Inhalte, Aktivitäten und diagnostische Beobachtungen. In C. Brokmann-Nooren, I. Gereke, H. Kiper & W. Renneberg (Hrsg.), Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen (S.168–184). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Hasemann, K. & Gasteiger, H. (2014). Anfangsunterricht Mathematik (3. überarb. u. erw. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Hauser, B. (2016). Spielen. Frühes Lernen in Familie, Krippe und Kindergarten (2. Aufl.). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Hauser, B., Vogt, F., Stebler, R. & Rechsteiner, K. (2014). Förderung früher mathematischer Kompetenzen. Spielintegriert oder trainingsbasiert. Frühe Bildung 3(3), S. 139–145.

Jörns, C., Schuchardt, K., Grube, D. & Mähler, C. (2014). Spielorientierte Förderung numerischer Kompetenzen im Vorschulalter und deren Eignung zur Prävention von Rechenschwierigkeiten. Empirische Sonderpädagogik 6(3), S. 243–259.

Kammermeyer, G., Martschinke, S., Drechsler, K. (2006). Zur Entwicklung von Risiko- und Sorgenkindern in der Grundschule. In A. Schründer-Lenzen (Hrsg.), Risikofaktoren kindlicher Entwicklung (S. 140–155). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Krajewski, K. (2003). Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Dr. Kovač.

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2008). Kurz- und langfristige Effekte mathematischer Frühförderung im Kindergarten durch das Programm „Mengen, zählen, Zahlen“. Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie 40(3), S. 136–146.

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. Psychologie in Erziehung und Unterricht 53, S. 246–262.

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2008): Kurz- und langfristige Effekte mathematischer Frühförderung im Kindergarten durch das Programm Mengen, zählen, Zahlen 2. Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 40, 135–146.

Lee, K. (2010). Kinder erfinden Mathematik. Gestaltendes Tätigsein mit gleichem Material in großer Menge. Weimar, Berlin: verlag das netz.

Lehrl, S. (2018). Mathematische Bildung und Förderung. In T. Schmidt & W. Smidt (Hrsg.), Handbuch empirische Forschung in der Pädagogik der frühen Kindheit (S. 317–331). Münster: Waxmann.

Lehrl, S., Klucniok, K., Rossbach, H.-G. & Anders, Y. (2017). Long Term Persistence of Preschool Intervention on Children’s Mathematical Development: Results From the German Model Project „Kindergarten of the Future in Bavaria“. Global Education Review 4(3), S. 70–87.

Lorenz, J. H. (2012). Kinder begreifen Mathematik. Frühe mathematische Bildung und Förderung. Stuttgart: Kohlhammer.

Lüken, M. (2012). Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern. Münster: Waxmann.

Lüthje, T. (2010). Das räumliche Vorstellungsvermögen von Kindern im Vorschulalter: Ergebnisse einer Interviewstudie. Hildesheim: Verlag eDISSion.

Maier, A. S. (2019). Geometrisches Begriffsverständnis von 4- bis 6-jährigen Kindern. In England und Deutschland. Münster: Waxmann.

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (2002). Das kleine Zahlenbuch. Teil 1: Spielen und Zählen. Seelze: Kallmeyer.

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (2006). Das kleine Formenbuch. Teil 1: Legen – Bauen – Spiegeln. Seelze: Kallmeyer.

Obersteiner, A. (2012). Mentale Repräsentationen von Zahlen und der Erwerb arithmetischer Fähigkeiten. Konzeptionierung einer Förderung mit psychologisch-didaktischer Grundlegung und Evaluation im ersten Schuljahr. Münster: Waxmann.

Padberg, F. & Benz, C. (2011). Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung (4. erw., stark überarb. Aufl.). Heidelberg: Springer Spektrum.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1972). Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde (3. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Rathgeb-Schnierer, E. (2008). Mathematik im Kindergartenalltag entdecken und erfinden – Konkretisierung eines Konzepts zur mathematischen Denkentwicklung am Beispiel von Perlen. In B. Daiber & I. Weiland (Hrsg.), Impulse der Elementardidaktik (S. 77–88). Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Rathgeb-Schnierer, E. (2012). Mathematische Bildung. In D. Kucharz (Hrsg.), Elementarbildung (S. 50–85). Weinheim: Beltz.

Rathgeb-Schnierer, E. (2015). Mathematische Bildung im Kindergarten. In B. Hauser, E. Rathgeb-Schnierer, R. Stebler & F. Vogt (Hrsg.), Mehr ist mehr. Mathematische Frühförderung mit Regelspielen (S. 10–25). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Reuter, D. & Wittmann, G. (2015). Mit gleichseitigen Dreiecken gemeinsam arbeiten. Grundschulzeitschrift 281, S. 46–49.

Royar, T. & Streit, C. (2010). MATHElino. Kinder begleiten auf Mathematischen Entdeckungsreisen. Seelze: Klett/Kallmeyer.

Schäfer, G. (2011): Was ist frühkindliche Bildung? Kindlicher Anfängergeist in einer Kultur des Lernens. Weinheim, Basel: Juventa.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Schmidt, S. (1982). Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern. Journal für Mathematik-Didaktik 3(3/4), S. 227–263.

Schneider, W. & Krajewski, K. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. Psychologie in Erziehung und Unterricht 53(4), S. 246–262.

Schneider, W., Küspert, P. & Krajewski, K. (2016). Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen (2. aktual. u. erw. Aufl.). Paderborn: UTB/Schöningh.

Schuler, S. (2013). Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs. Münster: Waxmann.

Stamm, M. & Edelmann, D. (2013). Einleitung ins Handbuch. In M. Stamm & D. Edelmann (Hrsg.), Handbuch frühkindliche Bildungsforschung (S. 13–21). Wiesbaden: Springer VS.

Steinweg, A. S. (2006). ... sich ein Bild machen. Terme und figurierte Zahlen. mathematik lehren 136, S. 14–17.

Steinweg, A. S. (2008). Zwischen Kindergarten und Schule – Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In F. Hellmich & H. Köster (Hrsg.), Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften (S. 143–159). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Viernickel, S. (2017): Rahmenbedingungen für professionelles Handeln in Kindertageseinrichtungen. In: H. Ballusek, von (Hrsg.), Professionalisierung der Frühpädagogik (S. 39–52).Opladen, Berlin, Toronto: Budrich.

Weißhaupt, S., Peucker, S. & Wirtz, M. (2006). Diagnose mathematischen Vorwissens im Vorschulalter und Vorhersage von Rechenleistungen und Rechenschwierigkeiten in der Grundschule. Psychologie in Erziehung und Unterricht 53(6), S. 236–245.

Wittmann, E. C. (2004). Design von Lernumgebungen zur mathematischen Frühförderung. In G. Faust, M. Götz, H. Hacker & H.-G. Roßbach (Hrsg.), Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich (S. 49–63). Klinkhardt: Bad Heilbrunn.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2008). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. Van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret (S. 42–65). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2009). Das Zahlenbuch. Gesamtpaket zum Frühförderprogramm. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C. (2016). Die Grundkonzeption des Mathe 2000-Frühförderprogramms. In E. C. Wittmann (Hrsg.), Kinder spielerisch fördern – mit echter Mathematik (S. 22–45). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Literatur zu 3 ELEMENTARDIDAKTISCHE GRUNDLEGUNG

Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2015). Frühe mathematische Bildung. Heidelberg: Springer Spektrum.

Bruns, J. (2014). Adaptive Förderung in der elementarpädagogischen Praxis. Eine empirische Studie zum didaktischen Handeln von Erzieherinnen und Erziehern im Bereich Mathematik. Münster: Waxmann.

Fuchs, M. (2014). Alle Kinder sind Matheforscher: Frühkindliche Begabungsförderung in heterogenen Gruppen. Seelze: Klett/Kallmeyer.

Gudjons, H. (2001). Handlungsorientiert lehren und lernen, Projektunterricht und Schüleraktivität (6. Auflage). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Kammermeyer, G., King, S., Goebel, P., Lämmerhirt, A., Leber, A., Metz, A., Papillion-Piller, A. & Roux, S. (2017). Mit Kindern im Gespräch Kita. Strategien zur Sprachbildung und Sprachförderung von Kindern in Kindertageseinrichtungen. Donauwörth: Auer.

Kammermeyer, G., King, S., Goebel, P., Lämmerhirt, A., Leber, A., Metz, A., Papillion-Piller, A. & Roux, S. (2019). „Mit Kindern im Gespräch“ – Qualifizierungskonzept zur Sprachbildung und Sprachförderung von Kindern in Kindertageseinrichtungen. Verbund „Gezielte alltagsintegriertes Sprachbildung in Schlüsselsituationen in Rheinland-Pfalz, Nordrhein-Westfahlen und Baden-Württemberg“. In C. Titz, S. Geyer, A. Ropeter, H. Wagner, S. Weber & M. Hasselhorn (Hrsg.), Konzepte zur Sprach- und Schriftsprachförderung: Praxiserfahrungen (S. 13–36). Stuttgart: Kohlhammer.

Kammermeyer, G., Roux, S. & Stuck, A. (2016). Qualität in der vorschulischen Sprachförderung – Ergebnisse der Evaluation der (additiven) Sprachförderung in Rheinland-Pfalz. Psychologie in Erziehung und Unterricht 84 (1), Seite 49–63.

Lorenz, J. H. (2012). Kinder begreifen Mathematik: Frühe mathematische Bildung und Förderung. Stuttgart: Kohlhammer.

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (2014) (Hrsg.). Orientierungsplan für Bildung und Erziehung in baden-württembergischen Kindergärten und weiteren Kindertageseinrichtungen. Freiburg, Basel, Wien: Verlag Herder.

Schuler, S. (2013). Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen: Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs. Münster,New York: Waxmann.

Siraj-Blatchford, I., Sylva, K., Muttock, S., Gilden, R. & Bell, D. (2002). Researching Effective Pedagogy in the Early Years. Research Report No. 356. Norwich: Queen‘s Printer.

Steffensky, M. (2017). Naturwissenschaftliche Bildung in Kindertageseinrichtungen. Weiterbildungsinitiative Frühpädagogische Fachkräfte (Band 48). München: WiFF Expertisen.

Teuscher, L. (2017). Eingewöhnungsprozesse in neu eröffneten und in bestehenden Kitas. Eine vergleichende Untersuchung aus der Perspektive von Frühpädagoginnen und Eltern im Raum Baden-Württemberg. Online verfügbar unter https://phka.bsz-bw.de/frontdoor/index/index/docId/82 [08.04.2020].

Tietze, W., Becker-Stoll, F., Bensel, J., Eckhardt, A., Haug-Schnabel, G., Kalicki, B. & Keller, H. (Hrsg.) (2013). Nationale Untersuchung zur Bildung, Betreuung und Erziehung in der frühen Kindheit (NUBBEK). Kiliansroda: verlag das netz.

Vygotsky, L.S. (1978). Mind in society – The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

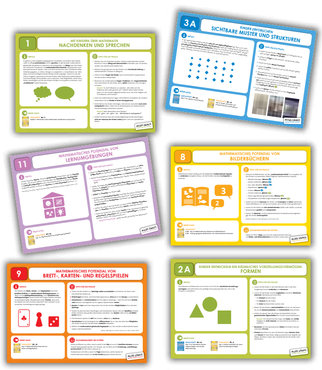
Wertfein, M., Wirts, C. & Wildgruber, A. (2015). Bedingungsfaktoren für gelingende Interaktionen zwischen Erzieherinnen und Kindern. Ausgewählte Ergebnisse der BIKE-Studie. München: Staatsinstitut für Frühpädagogik. Online verfügbar unter https://www.ifp.bayern.de/imperia/md/content/stmas/ifp/projektbericht_bike_nr_27.pdf [14.05.2019].

ALLES ZÄHLT!
MATHE IM KITA-ALLTAG

WEITERE MATERIALIEN

PRAXISHEFT

Im diesem Heft finden Sie praxisnahes Begleitmaterial zu den Impulskarten. Außerdem sind Reflexionsbögen als Kopiervorlagen enthalten, um im Team das „mathematische Potenzial“ Ihrer Einrichtung zu ermitteln.



IMPULSKARTEN

Auf den 16 großformatigen Impulskarten erhalten Sie Anregungen zur Unterstützung mathematischer Bildungsprozesse im Alltag.

IBBW Institut für Bildungsanalysen Baden-Württemberg

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT