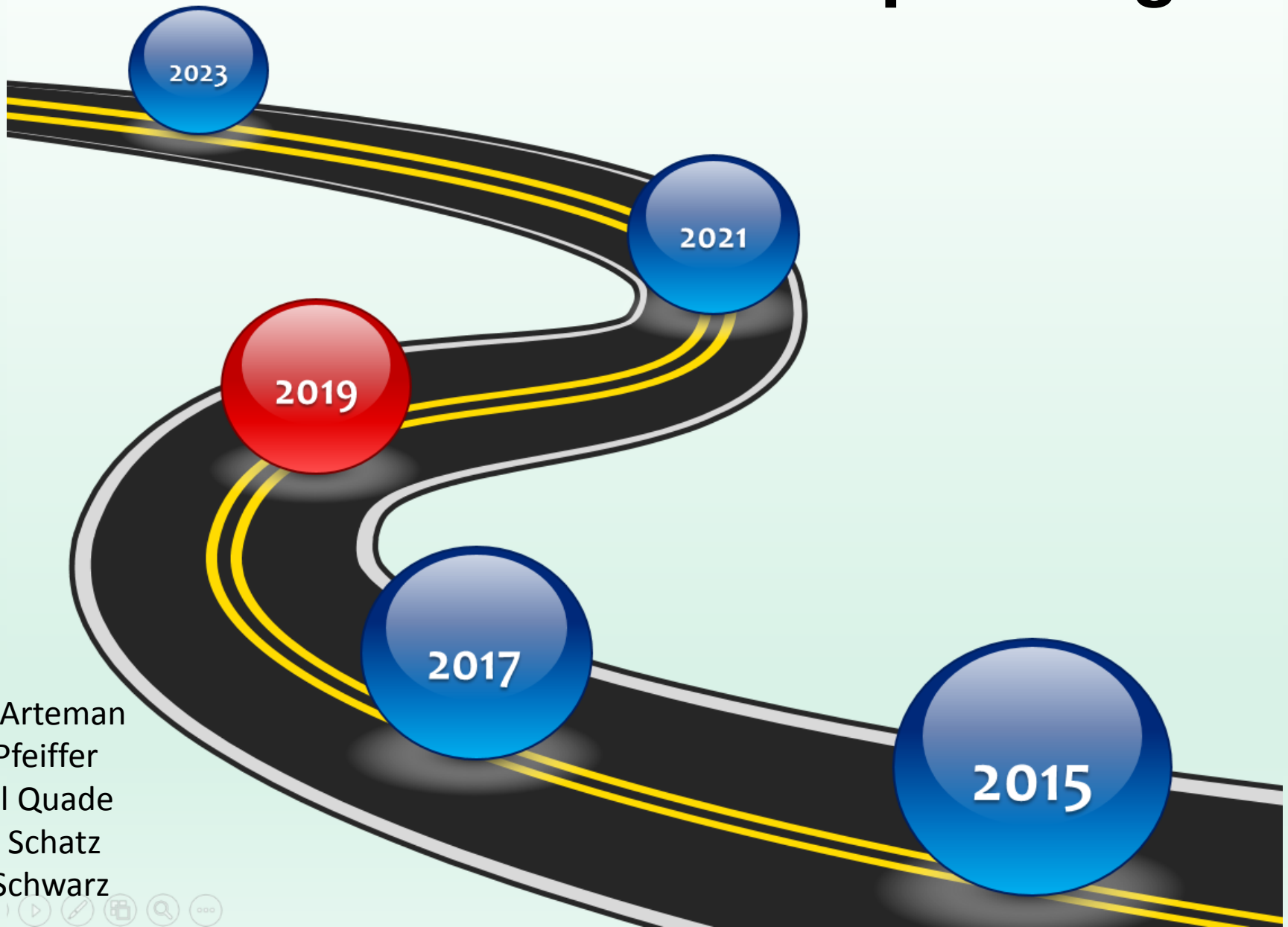
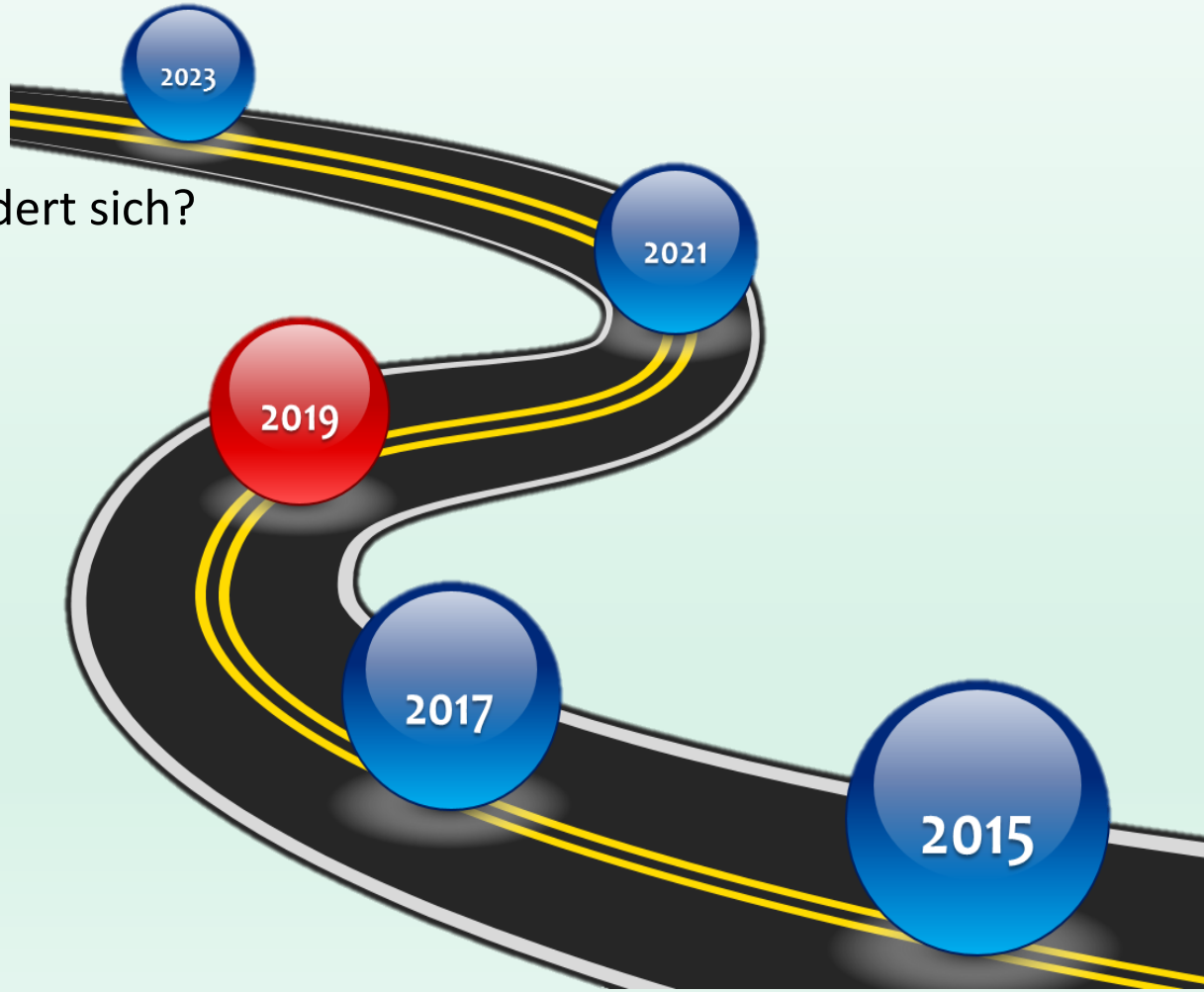
Die schriftliche Abiturprüfung



Patrick Arteman
Achim Pfeiffer
Michael Quade
Torsten Schatz
Dieter Schwarz

Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik 2019 und 2020



1. Rahmenbedingungen

Was bleibt – was ändert sich?

- Inhalte
- Gleichungslehre
- Schülerlösungen
- Operatoren

2. Aufgaben

Musteraufgabensatz

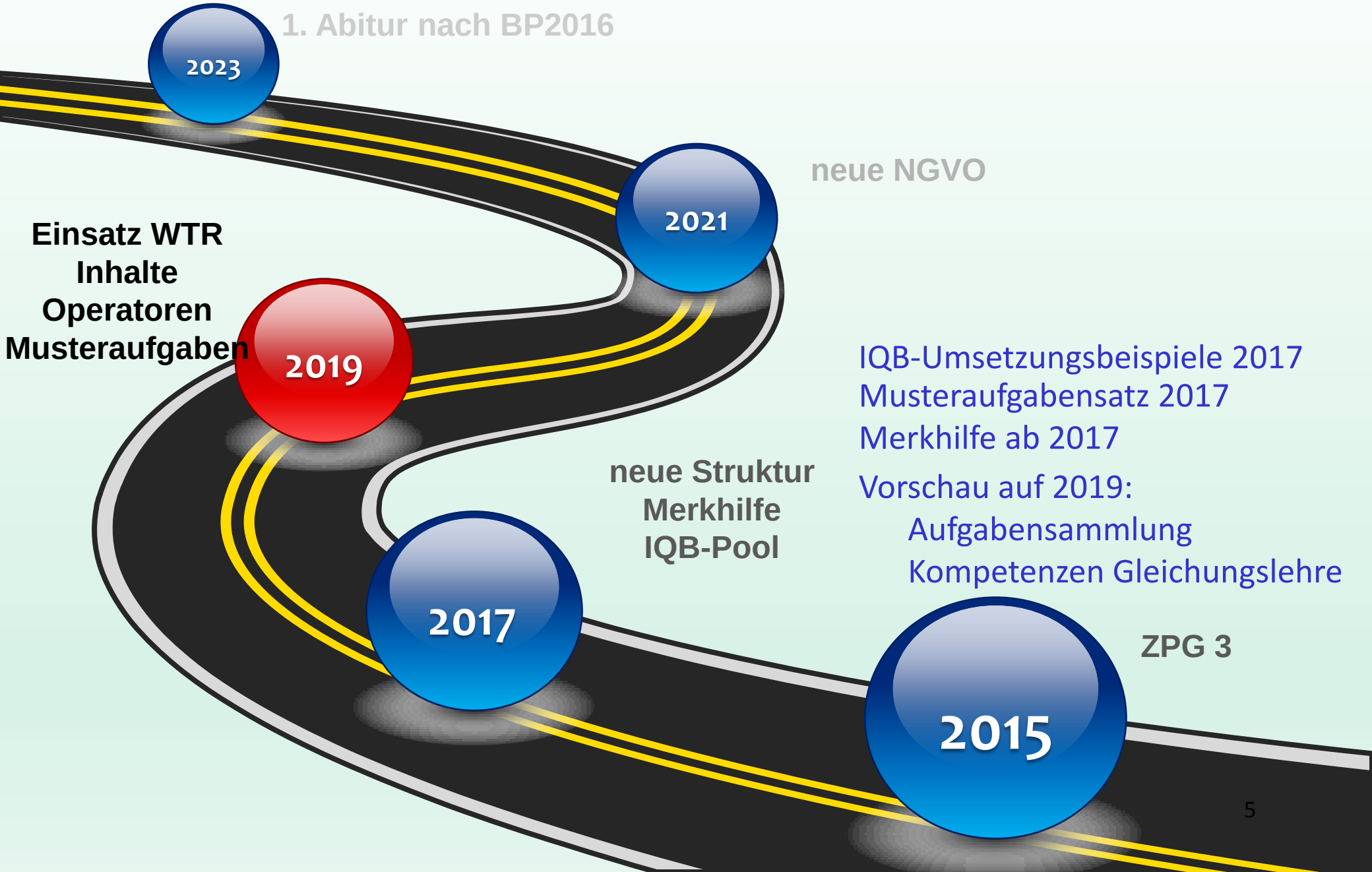
Aufgabenfundus

Abitur im Wandel

	2013-2016	2017/2018	2019/2020
Bearbeitungszeit	240 Minuten	270 Minuten	270 Minuten
Gesamtpunktzahl	60 VP	60 VP	60 VP
Pflichtteil	30 VP	20 VP	20 VP
Wahlteil Analysis	15 VP	20 VP	20 VP
Wahlteil **Geometrie** **Stochastik**	15 VP	 10 VP 10 VP	 10 VP 10 VP

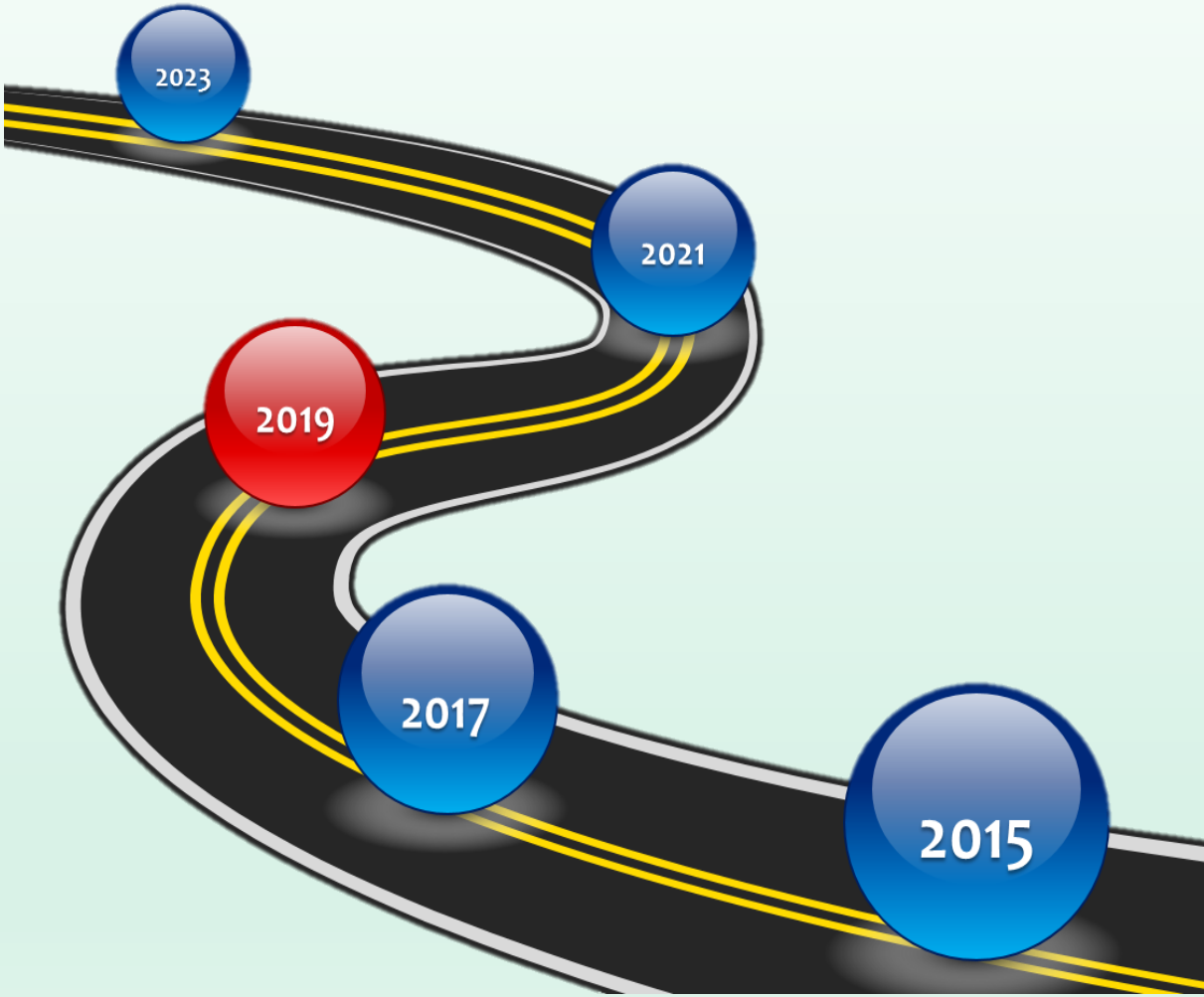
Abitur im Wandel

	2013-2016	2017/2018	2019/20
	Geometrie- und Stochastik in einer WT-Aufgabe	Geometrie und Stochastik im WT in getrennten Aufgaben	Geometrie und Stochastik im WT in getrennten Aufgaben
Hilfsmittel	GTR/CAS Formelsammlung	GTR/CAS Merkhilfe	WTR Merkhilfe
Punkteverteilung	VP-Angaben für die Teilaufgaben, Feinpunkteverteilung durch die Lehrkraft	VP-Angaben für die Teilaufgaben, Feinpunkteverteilung in den Lösungshinweisen	VP-Angaben für die Teilaufgaben, Feinpunkteverteilung in den Lösungshinweisen


1. Abitur nach BP2016
2023
neue NGVO
2021
Einsatz WTR
Inhalte
Operatoren
Musteraufgaben
2019
IQB-Umsetzungsbeispiele 2017
Musteraufgabensatz 2017
Merkhilfe ab 2017
Vorschau auf 2019:
Aufgabensammlung
Kompetenzen Gleichungslehre
neue Struktur
Merkhilfe
IQB-Pool
2017
ZPG 3
2015

1. Rahmenbedingungen

- Inhalte
- Gleichungslehre
- Schülerlösungen
- Operatoren



Schriftliche Abiturprüfung Mathematik 2013 — Inhalte

Gleichungen

- lineare, quadratische Gleichungen
- einfache Bruchgleichungen
- Potenzgleichungen
- Exponentialgleichungen
- einfache trigonometrische Gleichungen
- Gleichungen, die auf „Nullprodukte" führen
- auch: Lösung durch Substitution
- nicht: Polynomdivision, Wurzelgleichungen, Näherungsverfahren

Funktionen

- Kenntnis grundlegender Funktionstypen:
  - Potenzfunktionen
  - ganzrationale Funktionen
  - trigonometrische Funktionen
  - natürliche Exponentialfunktion
- Verschiebungen
- Streckungen in x- und y-Richtung
- Wirkung von Parametern
- Zusammengesetzte Funktionen:
  - Summen, Differenzen
  - einfache Produkte und Quotien[illegible]
  - einfache Verkettungen
- senkrechte und waagerec[illegible] Asymptoten
  - nicht: schiefe Asymptote[illegible] Näherungs[illegible]
- Nullstellen
- Bestimmung von Funktionen [illegible] vorgegeb[illegible] Eigen[illegible] in einfachen Fällen
- nicht: Folgen, Iterationen
- nicht: vollständige Induktion

Differentialrechnung

- Ableitung (auch höhere Ableitungen)
- Änderungsrate
- Ableitungsfunktion
- Tangente und Normale
- Ableitungsregeln:
  - Summen- und Faktorregel
  - Potenzregel
  - Produktregel
  - Kettenregel
  - nicht: Quotientenregel
- Monotonie
- Extrempunkte, Wendepunkte

Schriftliche Abiturprüfung Mathematik 2013 — Inhalte

Integralrechnung

- Stammfunktionen:
  - Summenregel
  - Faktorregel
  - lineare Substitution
- Integral
- Integralfunktion
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Anwendungen des Integrals:
  - Inhalt krummlinig begrenzter Flächen und Volumina
  - Rekonstruierter Bestand
  - Mittelwert
- nicht: Näherungsverfahren zur Bestimmung von Int[illegible]

Wachstum

- lin[illegible]ürliches, besch[illegible]es Wachstum
- auch diskrete Vorgänge in kon[illegible]ich[illegible] Mode[illegible]
- [illegible]: log[illegible]es Wachstum
- [illegible]ntia[illegible]leic[illegible]ng für natü[illegible] und besch[illegible] Wachstum

An[illegible]ytische Geo[illegible]

- [illegible] Gleichungssysteme (ohne Parameter):
  - Gaußverfahren
  - Bestimmung der Lösungsmenge
- Vektor, Ortsvektor:
  - Linearkombination
  - lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit nur anschaulich, nicht formal
- Geraden
- Ebenen (Parameter-, Koordinaten-, Normalenform)
- Lagebeziehungen
- Skalarprodukt
- Betrag eines Vektors
- Abstands- und Winkelberechnungen
- zeichnerische Darstellung von Objekten im Raum:
  - Schrägbilder, Spurpunkte, Spurgeraden
- nicht: Beweise mit Hilfe von Vektoren

Stochastik

- Baumdiagramme, Pfadregeln
- Binomialverteilung
- Erwartungswert
- Testen von Hypothesen (nur einseitig)
  - nicht: Fehler 2. Art
- nicht: stetige Verteilung

Letztmals Abi 2018

Gleichungen

- lineare, quadratische Gleichungen
- einfache Bruchgleichungen
- Potenzgleichungen
- Exponentialgleichungen
- einfache trigonometrische Gleichungen
- Gleichungen, die auf „Nullprodukte“ führen
- auch: Lösung durch Substitution
- nicht: Polynomdivision, Wurzelgleichungen, Näherungsverfahr

Letztmals Abi 2018

Schreiben des KM vom 15. Oktober 2014

Schriftliche Abiturprüfung Mathematik ab 2019 Kompetenzen Gleichungslehre

Erwartete Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre

0. Grundtechniken

- Faktorisierung durch Ausklammern
- nicht: Faktorisierung in schwierigen Fällen
  (Anwendung einer binomischen Formel „rückwärts“, Polynomdivision)
- Substitution
- Einsetzungsverfahren
- Fallunterscheidung in einfachen Fällen (z.B. bei Gleichungen mit Parametern)

1. Lineare Gleichungen

- auch: Untersuchung der Lösbarkeit linearer Gleichungen mit Parameter

Beispiel

1.1 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von a: $ax = x + 3$

2. Quadratische Gleichungen

- Lösen quadratischer Gleichungen mit beliebigen Koeffizienten
- Untersuchung der Lösbarkeit quadratischer Gleichungen mit Parameter

Beispiele

Wachstum

- lineares, natürliches, beschränktes Wachstum
- auch diskrete Vorgänge in kontinuierlicher Modellierung
- nicht: logistisches Wachstum
- Differentialgleichung für natürliches und beschränktes Wachstu

Letztmals Abi 2018

Inhalte

Die im Bildungsplan 2004 definierten inhaltlichen Grundlagen der Abiturprüfung bleiben unverändert gültig. Wie bisher wird darüber hinaus im Schwerpunktthemenerlass des jeweiligen Prüfungsjahres festgelegt, welche Inhalte nicht Gegenstand der schriftlichen Abiturprüfung sind. Vor dem Hintergrund der zusätzlichen Anforderungen im Bereich Algebra/Gleichungslehre werden für die Prüfungsjahre ab 2019 die Themenbereiche Differenzialgleichungen, Volumen von Rotationskörpern und Abstand windschiefer Geraden nicht mehr Gegenstand der schriftlichen Abiturprüfung sein.

Bisher

Funktionen

- Kenntnis grundlegender Funktionstypen:
  - Potenzfunktionen
  - ganzrationale Funktionen
  - trigonometrische Funktionen
  - natürliche Exponentialfunktion
- Verschiebungen
- Streckungen in x- und y-Richtung
- Wirkung von Parametern
- Zusammengesetzte Funktionen:
  - Summen, Differenzen
  - einfache Produkte und Quotienten
  - einfache Verkettungen
- senkrechte und waagerechte Asymptoten
  - nicht: schiefe Asymptote, Näherungskurve
- Nullstellen
- Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften in einfachen Fällen
- nicht: Folgen, Iterationen
- nicht: vollständige Induktion

Letztmals Abi 2018

Bisher

Differentialrechnung

- Ableitung (auch höhere Ableitungen)
- Änderungsrate
- Ableitungsfunktion
- Tangente und Normale
- Ableitungsregeln:
  - Summen- und Faktorregel
  - Potenzregel
  - Produktregel
  - Kettenregel
  - nicht: Quotientenregel
- Monotonie
- Extrempunkte, Wendepunkte

Letztmals Abi 2018

Bisher

Integralrechnung

- Stammfunktionen:
  - Summenregel
  - Faktorregel
  - lineare Substitution
- Integral
- Integralfunktion
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Anwendungen des Integrals:
  - Inhalt krummlinig begrenzter Flächen und Volumina
  - Rekonstruierter Bestand
  - Mittelwert
- nicht: Näherungsverfahren zur Bestimmung von Integralen

Letztmals Abi 2018

Neu

Analysis

- Kenntnis grundlegender Funktionstypen und ihrer charakteristischen Eigenschaften:
  - Potenzfunktionen
  - ganzrationale Funktionen
  - trigonometrische Funktionen
  - natürliche Exponentialfunktion
- Wirkung von Parametern, insbesondere:
  - Verschiebungen
  - Streckungen in x- und y-Richtung
- Zusammengesetzte Funktionen:
  - Summen, Differenzen
  - einfache Produkte und Quotienten
  - einfache Verkettungen
- Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften in einfachen Fällen
- Funktionenscharen, Ortslinien
- Ableitung (auch höhere Ableitungen)

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Gleichungen

vgl. unten: „Erwartete Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre“

Analysis

- Kenntnis grundlegender Funktionstypen und ihrer charakteristischen Eigenschaften:
  - Potenzfunktionen
  - ganzrationale Funktionen
  - trigonometrische Funktionen
  - natürliche Exponentialfunktion
- Wirkung von Parametern, insbesondere:
  - Verschiebungen
  - Streckungen in x- und y-Richtung
- Zusammengesetzte Funktionen:
  - Summen, Differenzen
  - einfache Produkte und Quotienten
  - einfache Verkettungen
- Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften in einfachen Fällen
- Funktionenscharen, Ortslinien
- Ableitung (auch höhere Ableitungen)
- Änderungsrate
- Ableitungsfunktion
- Tangente und Normale
- Ableitungsregeln:
  - Summen- und Faktorregel
  - Potenzregel
  - Produktregel
  - Kettenregel
- Untersuchung von Funktionen und Graphen, insbesondere:
  - Nullstellen
  - elementare Symmetrie
  - Grenzverhalten, senkrechte und waagerechte Asymptoten
  - Monotonie, Krümmungsverhalten
  - Extrempunkte, Wendepunkte
- Stammfunktionen:
  - Summenregel
  - Faktorregel
  - lineare Substitution
- Integral
- Integralfunktion
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Anwendungen des Integrals:
  - Berechnung von Flächeninhalten (auch unbegrenzter Flächen)
  - rekonstruierter Bestand
  - Mittelwert
  - nicht: Volumen von Rotationskörpern
- nicht: Folgen, Iterationen
- nicht: Differenzialgleichungen, Wachstumsprozesse

Neu

Schreiben des KM
vom 15. Oktober 2014

elementare Symmetrie

- Hochzahlen betrachten bei ganz-rat. Fkt.
- Untersuchung mit f(-x) in algebraisch einfachen Fällen, z.B. $f(x) = e^{x} + e^{-x}$

Funktionenscharen Ortslinien

- „Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve, auf der die Hochpunkte aller K_a liegen“
- Nicht erwartet: „Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, die die Hochpunkte aller K_a bilden“

Grenzverhalten

- Auch $f(x) = x^{z} \cdot e^{kx}$
- „Hochzahlenregel“ bei gebr.-rat. Fkt.

Flächenberechnung auch unbegrenzter Flächen

- für $x \to \pm\infty$
- für $x \to a$

Krümmungs-verhalten

Analytische Geometrie

- Vektor, Ortsvektor, Linearkombination
- Geraden
- Ebenen (Parameter-, Koordinaten-, Normalenform)
- Lagebeziehungen
- Skalarprodukt
- Betrag eines Vektors
- Abstands- und Winkelberechnungen
  nicht: Abstand windschiefer Geraden
- zeichnerische Darstellung von Objekten im Raum:
  Schrägbilder, Spurpunkte, Spurgeraden
- nicht: Beweise mit Hilfe von Vektoren

Schreiben des KM
vom 15. Oktober 2014

Stochastik

- Baumdiagramme, Pfadregeln
- Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Erwartungswert
- Binomialverteilung, Formel von Bernoulli
- Testen von Hypothesen (nur einseitig)
  nicht: Fehler 2. Art
- nicht: stetige Verteilung

Neu

elementare Symmetrie

Funktionenscharen
Ortslinien

Grenzverhalten

Krümmungs-
verhalten

Flächenberechnung
auch unbegrenzter
Flächen

Zufallsvariable,
Wahrscheinlichkeits-
verteilung,
Formel von Bernoulli

Botschaft:
Präzisierung der Inhalte,
keine Erweiterung

„Nicht-Items“ und ihre Bedeutung:

- Folgen, Iterationen
- Differenzialgleichungen
- Wachstumsprozesse
- Volumen von Rotationskörpern als Anwendung des Integrals
- Abstand windschiefer Geraden
- Beweise mit Hilfe von Vektoren
- Fehler 2. Art
- Stetige Verteilung

b) Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit

$$g(t) = 80 \cdot \left(1 - e^{-0{,}05 \cdot t}\right) \quad ; \quad t \geq 0$$

(t in Minuten seit Infusionsbeginn, g(t) in mg).

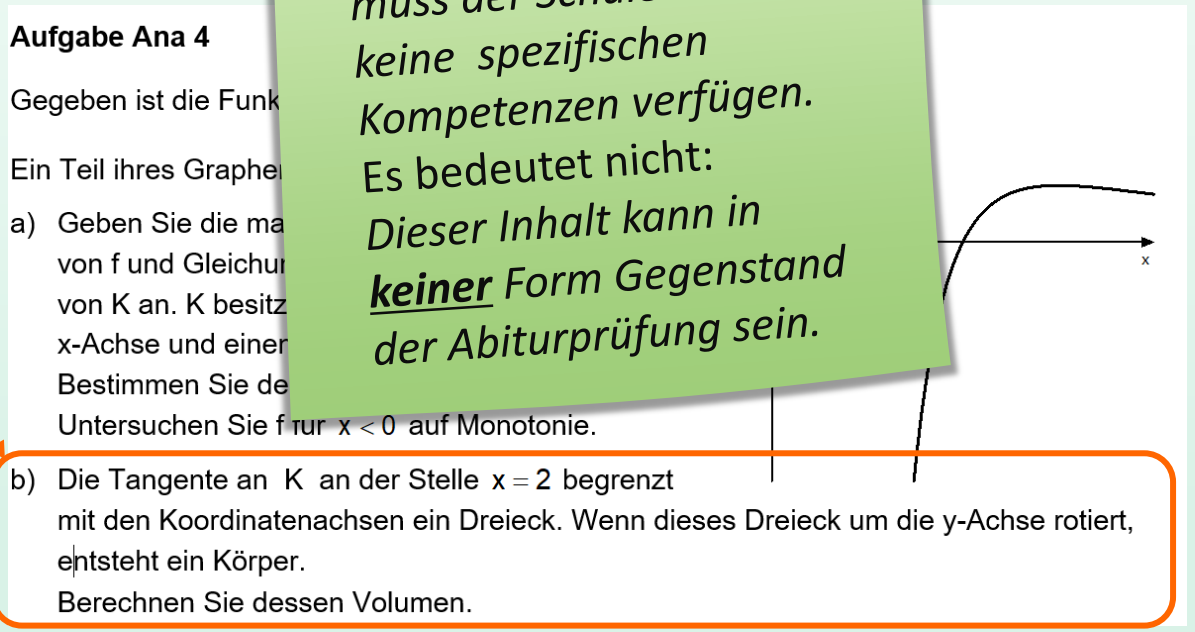
Bestimmen Sie die Wirkstoffmenge, die sich langfristig im Blut befinden wird.
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge ständig zunimmt.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge 1 $\frac{mg}{min}$ beträgt.
Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge während [illegible] vier Stunden.
Gegeben ist [illegible]
Formulieren [illegible] se Gleichung führt.

„Nicht” bedeutet:
In Bezug auf diesen Inhalt muss der Schüler über keine spezifischen Kompetenzen verfügen.
Es bedeutet nicht:
*Dieser Inhalt kann in **keiner** Form Gegenstand der Abiturprüfung sein.*

„Nicht-Items“ und ihre Bedeutung:

- Folgen, Iterationen
- Differenzialgleichungen
- Wachstumsprozesse
- Volumen von Rotationskörpern als Anwendung des Integrals
- Abstand windschiefer Geraden
- Beweise mit Hilfe von Vektoren
- Fehler 2. Art
- Stetige Verteilung

„Nicht” bedeutet:
In Bezug auf diesen Inhalt muss der Schüler über keine spezifischen Kompetenzen verfügen.
Es bedeutet nicht:
*Dieser Inhalt kann in **keiner** Form Gegenstand der Abiturprüfung sein.*



Aufgabe Ana 4

Gegeben ist die Funk

Ein Teil ihres Graphe

a) Geben Sie die ma
von f und Gleichu
von K an. K besitz
x-Achse und einer
Bestimmen Sie de
Untersuchen Sie f für $x < 0$ auf Monotonie.

b) Die Tangente an K an der Stelle $x = 2$ begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Wenn dieses Dreieck um die y-Achse rotiert, entsteht ein Körper.
Berechnen Sie dessen Volumen.

x

Nicht mehr extra aufgeführt, da kein Inhalt des Bildungsplans:
schiefe Asymptoten, Näherungskurve, vollständige Induktion, Quotientenregel, Näherungsverfahren zur Bestimmung von Integralen

elementare Symmetrie

Funktionenscharen
Ortslinien

Grenzverhalten

Krümmungs-
verhalten

Flächenberechnung
auch unbegrenzter
Flächen

Zufallsvariable,
Wahrscheinlichkeits-
verteilung,
Formel von Bernoulli

Bedeutung der
Nicht-Items:
„Keine spezifischen
Kenntnisse”

Erwartete Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre

0. Grundtechniken

- Faktorisierung durch Ausklammern
- nicht: Faktorisierung in schwierigen Fällen
  (Anwendung einer binomischen Formel „rückwärts“, Polynomdivision)
- Substitution
- Einsetzungsverfahren
- Fallunterscheidung in einfachen Fällen (z.B. bei Gleichungen mit Parametern)

1. Lineare Gleichungen

- auch: Untersuchung der Lösbarkeit linearer Gleichungen mit Parameter

Beispiel

1.1 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von a: $ax = x + 3$

2. Quadratische Gleichungen

- Lösen quadratischer Gleichungen mit beliebigen Koeffizienten
- Untersuchung der Lösbarkeit quadratischer Gleichungen mit Parameter

Beispiele

2.1 $\frac{5}{2}x^2 - 4x = 2$

2.2 $2x^2 = 1{,}8x + 0{,}4$ (mit WTR)

2.3 $2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{7} = 0$ (mit WTR)

2.4 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von u: $9x^2 - 3ux + 1 = 0$

3. Potenzgleichungen

- Lösen von Potenzgleichungen mit natürlichen Exponenten
- bei negativen Exponenten: siehe 6.4

Beispiele

3.1 $4x^3 + 35 = 21$

3.2 Bei einer verbeulten Münze ist die Wahrscheinlichkeit, bei zwölf Würfen kein „Wappen“ zu erhalten, etwa 5%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt „Wappen“ im dreizehnten Wurf? (mit WTR)

4. Exponentialgleichungen

- Lösen von Exponentialgleichungen mit beliebiger Basis

Beispiele

4.1 $4 \cdot e^{-x} = 1$

4.2 $2 \cdot 3^x = 8$

4.3 $2 \cdot e^{2x+1} = 3$ (mit WTR)

4.4 Wie oft muss man einen fairen Würfel mindestens werfen, um mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit mindestens einmal eine „Sechs“ zu erhalten? (mit WTR)

5. Wurzelgleichungen

- Lösen von Wurzelgleichungen durch Quadrieren, ggf. nach Isolieren des Wurzelterms (nur im Zusammenhang mit Abstandsberechnungen)
- nicht: Mehrfaches Quadrieren (bei mehreren Wurzeltermen)
- nicht: Betrachtung der Definitionsmenge, Überprüfung einer ermittelten Lösung
- nicht: Optimierung bei Wurzelfunktionen mit Mitteln der Differenzialrechnung

Beispiele

5.1 Welche Punkte der Normalparabel haben den Abstand $\sqrt{20}$ vom Ursprung?

5.2 Welche Punkte der Geraden g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ haben vom Punkt $A(3\,|\,5\,|\,3)$ den Abstand $\sqrt{13}$?

6. Bruchgleichungen

- Lösen von Bruchgleichungen, die durch einmalige Multiplikation mit x^n oder einem Linearfaktor auflösbar sind
- nicht: Betrachtung der Definitionsmenge, Überprüfung einer ermittelten Lösung

Beispiele

6.1 $\frac{x}{x+2} = \frac{2}{3}$

6.2 $\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} = 3$

6.3 $2x - 7 = \frac{1}{x-3}$

6.4 $x^{-4} = 81$

Weiterhin uneingeschränkte Gültigkeit der 2014 kommunizierten Kompetenzliste

Systematisches Probieren mit dem WTR nur in diskreten Kontexten

Zusatz „mit WTR“ (siehe 2.2 und 2.3) bezieht sich auf etwas aufwändigere Zahlenwerte, die im Pflichtteil so nicht erwartet werden

Beispiele

2.1 $\frac{5}{2}x^2 - 4x = 2$

2.2 $2x^2 = 1{,}8x + 0{,}4$ (mit WTR)

2.3 $2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{7} = 0$ (mit WTR)

Insbesondere also keine Lösung von Gleichungen mit reellen Lösungen durch Probieren mit dem WTR (das meint der Zusatz „mit WTR“ bei 2.2 / 2.3 also nicht)

Baden-Württemberg
REGIERUNGSPRÄSIDIUM TÜBINGEN
SCHULE UND BILDUNG

Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation in der schriftlichen Abiturprüfung im Fach Mathematik

1. Dokumentation der Lösung

Erwartet werden grundsätzlich

- die Darstellung eines geeigneten mathematischen Ansatzes,
- die nachvollziehbare Dokumentation des Lösungswegs (dabei ist eine Notation von GTR-Tastenfolgen nicht sinnvoll) sowie
- die Angabe des Ergebnisses.

2. Verwendung des GTR

Grundsätzlich ist der GTR im Wahlteil immer erlaubt, es sei denn, aufgrund der Anweisungen

- *exakt bestimmen, exakt berechnen, exakt ermitteln* (hier wird eine Rechnung ohne Verwendung des GTR und die Angabe eines algebraisch exakten Ergebnisses erwartet) sowie
- *beweisen, nachweisen, zeigen* (hier wird eine lückenlose, logische Beweisführung erwartet).

Letztmals Abi 2018

3. Begründung von Lösungen bzw. Ergebnissen

Grundsätzlich sind Lösungen bzw. Ergebnisse immer zu begründen, außer bei den Anweisungen

- *nennen, angeben, beschreiben* (hier sind lediglich Ergebnisse zu dokumentieren).

4. Qualität von Zeichnungen bzw. Skizzen in der Analysis

Eine **Skizze** umfasst

- beschriftete und mit Einheiten versehene Koordinatenachsen,
- die Erstellung eines Graphen ohne Wertetabelle,
- dabei (nicht notwendigerweise zeichengenaue) Eintragung charakteristischer Eigenschaften des Graphen (z.B. Extrempunkte, Asymptoten, ...).

Demgegenüber wird eine **Zeichnung** charakterisiert durch

- beschriftete und mit Einheiten versehene Koordinatenachsen,
- zeichengenaue Darstellung eines Graphen auf der Grundlage einer geeigneten, aber nicht unbedingt schriftlich fixierten Wertetabelle.

Dienstgebäude Konrad-Adenauer-Str. 40 · 72072 Tübingen · Telefon 07071 757-0 · Telefax 07071 757-2001
poststelle@rpt.bwl.de · www.rp.baden-wuerttemberg.de · www.service-bw.de
Buslinie 2 · Haltestelle „Regierungspräsidium" oder „Landespolizeidirektion"

Bisher

Abitur 2019/2020

Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation

Von den Schülerinnen und Schülern wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation erwartet, dazu gehören insbesondere:

- durch Verbalisierung des Vorgehens und Ergebnissätze strukturierte Darstellung
- angemessener sprachlicher Ausdruck, insbesondere korrekte Fachsprache
- Definition neu eingeführter Bezeichnungen (insbesondere von Zufallsvariablen)
- keine Angaben über Tastenfolgen von WTR-Eingaben

Operatoren

Die Bedeutung der bei Arbeitsaufträgen verwendeten Operatoren entspricht in den meisten Fällen (z. B. bei *deuten, interpretieren, erläutern*) dem allgemein üblichen Sprachgebrauch. Die folgenden Hinweise beschreiben bei typischen und häufig vorkommenden Operatoren Umfang und Qualität der erwarteten Lösung.

Operator	Hinweise
angeben *nennen*	• kein Ansatz, keine Begründung
beschreiben	• keine Begründung
beurteilen *begründen* *nachweisen* *zeigen*	• logisches Schließen bzw. Argumentieren
berechnen	• mathematischer Ansatz • nachvollziehbar dokumentierter rechnerischer Lösungsweg
bestimmen *ermitteln* *untersuchen*	• Art des Vorgehens frei wählbar (grafisch, rechnerisch), sofern nicht anders angegeben • nachvollziehbarer dokumentierter Lösungsweg
grafisch darstellen *zeichnen*	• möglichst genaue Darstellung
skizzieren	• bei Koordinatensystemen: beschriftete und skalierte Achsen • Reduktion auf charakteristische Eigenschaften

Wird in einer Aufgabenstellung ein „exakter Wert" gefordert, dann ist damit ein mathematisch exakter Ausdruck (z. B. $\frac{5}{7}$, $\ln(2)$, $\frac{\pi}{4}$) gemeint, nicht eine gerundete Dezimalzahl.

Neu

Bisher

(1) Dokumentation der Lösung

Um die volle Punktzahl einer Teilaufgabe bekommen zu können, wird neben der Richtigkeit der Lösung selbstverständlich auch eine entsprechende ordentliche Dokumentation erwartet, insbesondere dann, wenn die Lösung mit Hilfe des GTR erstellt wurde. Diese umfasst im Allgemeinen:

- die Darstellung eines (geeigneten) mathematischen Ansatzes,
- eine nachvollziehbare Dokumentation des Lösungsweges, wobei eine Notation von GTR-Tastenfolgen bzw. -Befehlen nicht sinnvoll ist,
- die Angabe des Ergebnisses.

Letztmals Abi 2018

Neu

Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation

Von den Schülerinnen und Schülern wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation erwartet, dazu gehören insbesondere:

- durch Verbalisierung des Vorgehens und Ergebnissätze strukturierte Darstellung
- angemessener sprachlicher Ausdruck, insbesondere korrekte Fachsprache
- Definition neu eingeführter Bezeichnungen (insbesondere von Zufallsvariablen)
- keine Angaben über Tastenfolgen von WTR-Eingaben

(2) Verwendung des GTR

Grundsätzlich ist der GTR im Wahlteil immer erlaubtes Hilfsmittel, außer bei den Anweisungen

– *„exakt bestimmen / exakt berechnen / exakt ermitteln“:*
Hier wird eine Rechnung ohne Verwendung des GTR und die Angabe eines algebraisch exakten Ergebnisses erwartet.

Letztmals Abi 2018

oder

– *„beweisen, nachweisen, zeigen“:*
Hier wird eine lückenlose, logische Beweisführung erwartet.

Bisher

(3) Begründung von Lösungen bzw. Ergebnissen

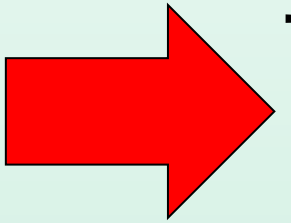
Grundsätzlich sind Lösungen bzw. Ergebnisse immer zu begründen, außer bei den Anweisungen *„nennen, angeben, beschreiben“* – hier sind lediglich Ergebnisse zu dokumentieren.

(4) Qualität von Skizzen bzw. Zeichnungen in der Analysis

Eine **Skizze** umfasst
- beschriftete und mit Einheiten versehene Koordinatenachsen,
- die Erstellung eines Graphen/Schaubilds ohne Wertetabelle,
- dabei (nicht notwendigerweise zeichengenaue) Eintragung charakteristischer Eigenschaften des Graphen/Schaubilds (z.B. Extrempunkte, Asymptoten, ...).

Demgegenüber wird eine **Zeichnung** charakterisiert durch
- beschriftete und mit Einheiten versehene Koordinatenachsen,
- zeichengenaue Darstellung eines Graphen/Schaubilds auf der Grundlage einer geeigneten, aber nicht unbedingt schriftlich fixierten Wertetabelle.

Bisher



„Operatorenliste“

Operatoren

Die Bedeutung der bei Arbeitsaufträgen verwendeten Operatoren entspricht in den meisten Fällen (z. B. bei *deuten, interpretieren, erläutern*) dem allgemein üblichen Sprachgebrauch. Die folgenden Hinweise beschreiben bei typischen und häufig vorkommenden Operatoren Umfang und Qualität der erwarteten Lösung.

Operator	Hinweise
angeben *nennen*	• kein Ansatz, keine Begründung
beschreiben	• keine Begründung
beurteilen *begründen* *nachweisen* *zeigen*	• logisches Schließen bzw. Argumentieren
berechnen	• mathematischer Ansatz • nachvollziehbar dokumentierter rechnerischer Lösungsweg
bestimmen *ermitteln* *untersuchen*	• Art des Vorgehens frei wählbar (grafisch, rechnerisch), sofern nicht anders angegeben • nachvollziehbarer dokumentierter Lösungsweg
grafisch darstellen *zeichnen*	• möglichst genaue Darstellung
skizzieren	• bei Koordinatensystemen: beschriftete und skalierte Achsen • Reduktion auf charakteristische Eigenschaften

Neu

Interpretation der Operatorenliste:
keine abgeschlossene Liste

Die folgenden Hinweise beschreiben bei typischen und häufig vorkommenden Operatoren Umfang und Qualität der erwarteten Lösung.

Operator	Hinweise
beurteilen *begründen* *nachweisen* *zeigen*	• logisches Schließen bzw. Argumentieren
bestimmen *ermitteln* *untersuchen*	• Art des Vorgehens frei wählbar (grafisch, rechnerisch), sofern nicht anders angegeben • nachvollziehbarer dokumentierter Lösungsweg

keine Synonyme !!!

Die Operatoren „ermitteln“ und „bestimmen“ lassen auch graphisches und heuristisches Vorgehen zu!!

Interpretation: “exakt“

Wird in einer Aufgabenstellung ein „exakter Wert“ gefordert, dann ist damit ein mathematisch exakter Ausdruck (z. B. $\frac{5}{7}$, $\ln(2)$, $\frac{\pi}{4}$) gemeint, nicht eine gerundete Dezimalzahl.

Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation

Von den Schülerinnen und Schülern wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation erwartet, dazu gehören insbesondere:

ierte Darstellung
achsprache
ufallsvariablen)

Operatoren

Die Bedeutung der bei Arbeitsaufträgen verwendeten Operatoren entspricht in den meisten Fällen (z. B. bei *deuten, interpretieren, erläutern*) dem allgemein üblichen Sprachgebrauch. Die folgenden Hinweise beschreiben bei typischen und häufig vorkommenden Operatoren Umfang und Qualität der erwarteten Lösung.

Operator	Hinweise
angeben *nennen*	• kein Ansatz, keine Begründung
beschreiben	• keine Begründung
beurteilen *begründen* *nachweisen* *zeigen*	• logisches Schließen bzw. Argumentieren
berechnen	• mathematischer Ansatz • nachvollziehbar dokumentierter rechnerischer Lösungsweg
bestimmen *ermitteln* *untersuchen*	• Art des Vorgehens frei wählbar (grafisch, rechnerisch), sofern nicht anders angegeben • nachvollziehbarer dokumentierter Lösungsweg
grafisch darstellen *zeichnen*	• möglichst genaue Darstellung
skizzieren	• bei Koordinatensystemen: beschriftete und skalierte Achsen • Reduktion auf charakteristische Eigenschaften

Wird in einer Aufgabenstellung ein „exakter Wert“ gefordert, dann ist damit ein mathematisch exakter Ausdruck (z. B. $\frac{5}{7}$, $\ln(2)$, $\frac{\pi}{4}$) gemeint, nicht eine gerundete Dezimalzahl.

Lesart der Operatorenliste:
„Beschreibung von Umfang und Qualität der erwarteten Lösung“

Bedeutung der Operatoren:
künftig Verzicht auf W-Fragen

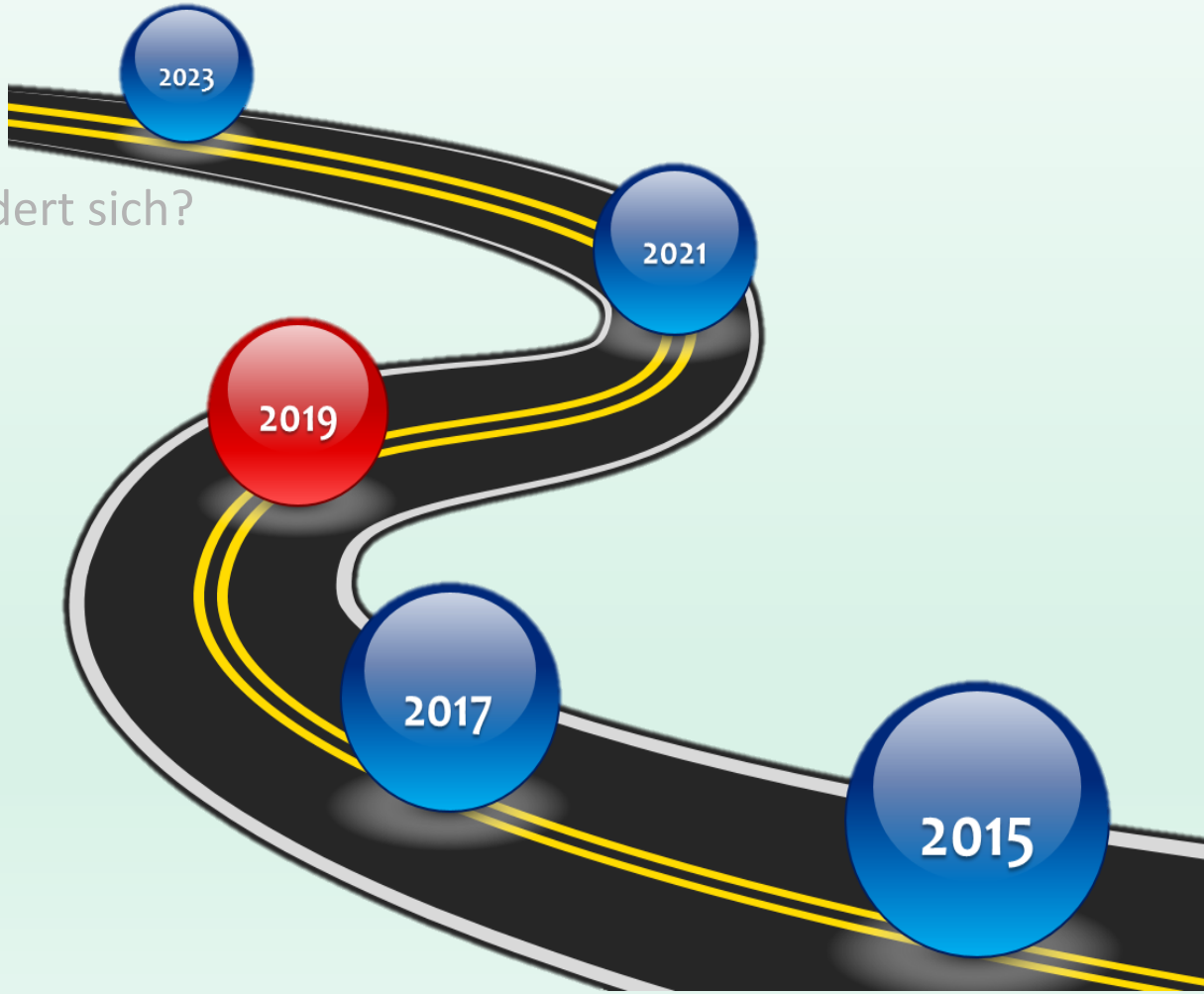
Operatorenliste im Einklang mit der entsprechenden IQB-Liste und der des BP 2016

Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik 2019 und 2020

1. Rahmenbedingungen

Was bleibt – was ändert sich?

- Inhalte
- Gleichungslehre
- Schülerlösungen
- Operatoren



2. Aufgaben

Musteraufgabensatz

Aufgabenfundus

vollständiger **Musteraufgabensatz** mit Punkteverteilung und Lösungshinweisen

A 1	1.1 Innermathematisch	BW-Sammlung 2019 (Aufg. B)
	1.2 Geschwindigkeit	Neu
A 2	Wasser	IQB 2017 (modifiziert)
B 1	Turm	Ursprünglicher HT 2017 (IQB)
B 2	Innermathematisch	Ursprünglicher HT 2017
C 1	Lampen	IQB 2015 (BW-Umsetzungsbeispiel)
C 2	Haushalte	Ursprünglicher HT 2017 (IQB)

Fundus:

Analysis
10 Aufgaben

Ana 1	Medikament	BW-Sammlung 2019 (A)
Ana 2	Funktionenschar	BW-Sammlung 2019 (A)
Ana 3	Temperatur	BW-Sammlung 2019 (B)
Ana 4	innermathematisch	BW-Sammlung 2019 (C)
Ana 5	innermathematisch	BW-Sammlung 2019 (C)
Ana 6	Wassertank	BW-Sammlung 2019 (D)
Ana 7	innermathematisch	BW-Sammlung 2019 (D)
Ana 8	Schale	IQB 2017
Ana 9	innermathematisch	IQB 2015 (modifiziert als BW-Umsetzung 2019)
Ana 10	Dose	IQB 2015 (modifiziert als BW-Umsetzung 2019)

Fundus:

Analysis
10 Aufgaben

Geometrie
4 Aufgaben

Geo 1	Kunstwerk	IQB 2015 (modifiziert als BW-Umsetzung 2019)
Geo 2	U-Boot	IQB 2015 (modifiziert als BW-Umsetzung 2019)
Geo 3	innermathematisch	HT 2015
Geo 4	Terrasse	HT 2015

Fundus:

Analysis
10 Aufgaben

Geometrie
4 Aufgaben

Stochastik
6 Aufgaben

Sto 1	Glücksrad	BW-Sammlung 2019 (A)
Sto 2	Schulfest	BW-Sammlung 2019 (B)
Sto 3	Hotel	BW-Sammlung 2019 (C)
Sto 4	Abitur	BW-Sammlung 2019 (D)
Sto 5	Biathlon	HT 2015
Sto 6	Tanzgruppe	HT 2016

Material ersetzt Konvolut für 2013

Beschreibung des inhaltlichen und strukturellen Rahmens für 2019/20

bereits veröffentlichte Aufgaben für 2019 sind integriert

noch keine Aussagen über 2021 und 2023 möglich

Verstärkt:
Argumentieren und Kommunizieren

Verstärkt:
algebraische Anforderungen

Größerer Anteil innermathematischer Aufgaben möglich

Teilweise Anpassung der Bepunktung

Anpassung der Aufgabenstellungen an das Hilfsmittel WTR:

- Graphen gegeben
- Gleichungen interpretieren

Mustersatz und Fundus 2019
Analysis

Erläuterungen und Hinweise

Mustersatz - Pflichtteil

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 3x \cdot \cos(x^2 + 1)$.

(2 VP)

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Integral $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

(2 VP)

Botschaft:
Keine Veränderungen
zu den bisher üblichen
Aufgabenstellungen.

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $(x^2 - 2) \cdot (e^x + 1) = 0$.

(2 VP)

Mustersatz - Pflichtteil

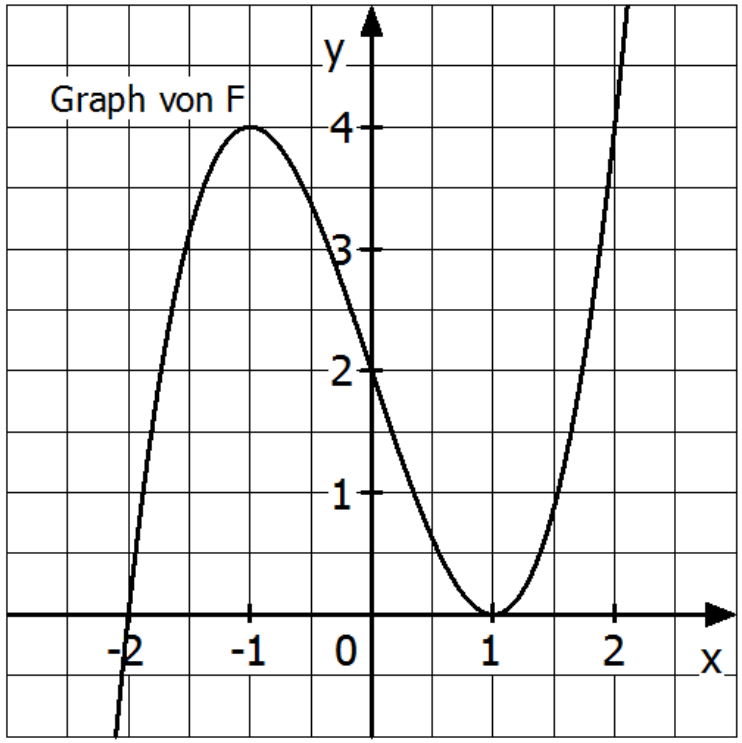
Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f .
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) f' besitzt im Bereich $-1 \le x \le 1$ eine Nullstelle.

(3) $f\big(F(-2)\big) > 0$



(4 VP)

Diese Aufgabe befindet sich auch in der bereits veröffentlichten Aufgabensammlung zu 2019 – sie wurde lediglich leicht modifiziert – u.a. wurde die Punkteverteilung innerhalb der Aufgabe verändert, wobei eine niedrigere Bepunktung schwieriger Aufgabenteile ja nicht schülerunfreundlicher ist.

Aufgabe A 1.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6 - 2e^{-x}$. Ihr Graph ist K.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an.
Untersuchen Sie f rechnerisch auf Monotonie.
Skizzieren Sie K.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, unter dem K die x-Achse schneidet.

(6 VP)

bestimmen *ermitteln* *untersuchen*	• Art des Vorgehens frei wählbar (grafisch, rechnerisch), sofern nicht anders angegeben • nachvollziehbarer dokumentierter Lösungsweg

b

bestimmen *ermitteln* *untersuchen*	• Art des Vorgehens frei wählbar (grafisch, rechnerisch), sofern nicht anders angegeben • nachvollziehbarer dokumentierter Lösungsweg

(3 VP)

c) Der Graph K* entsteht durch Spiegelung von K an der Geraden mit der Gleichung $y = 1$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der zu K* gehörenden Funktion f*.

(2 VP)

d) Eine Parabel zweiter Ordnung berührt den Graphen K im Punkt $S(0\,|\,4)$ und hat ihren Scheitel auf der Geraden mit der Gleichung $y = 5$.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel.

(4 VP)

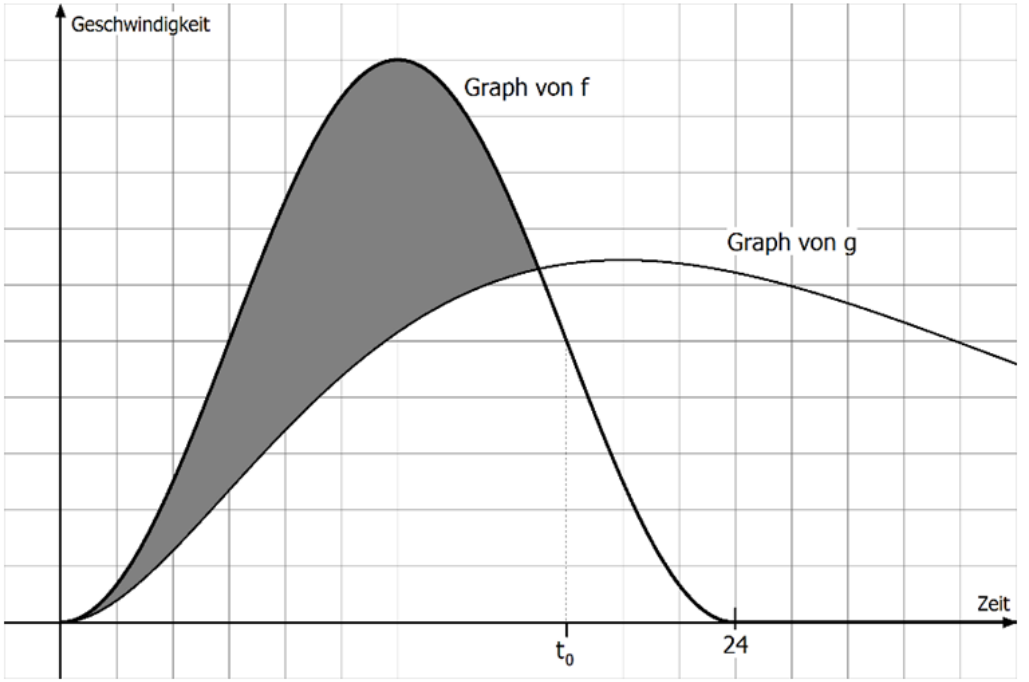
c) Gleichung von f* (2 VP)

K* entsteht, indem man K um 1 LE nach unten verschiebt, danach an der x-Achse spiegelt und schließlich wieder um 1 LE nach oben verschiebt:

$$f^*(x) = -(f(x) - 1) + 1 = 2 - f(x) = 2e^{-x} - 4$$

Aufgabe A 1.2

Die Funktionen f und g beschreiben die Geschwindigkeiten zweier Fahrzeuge F und G in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden, f(t) und g(t) in Meter pro Sekunde). Die Graphen von f und g sind in der Abbildung dargestellt. Die beiden Fahrzeuge starten zum Zeitpunkt $t = 0$ nebeneinander und fahren in dieselbe Richtung.



Botschaft:
Arbeiten an gegebenen Graphen

a) Beschreiben Sie die Bewegung von Fahrzeug F in den ersten 24 Sekunden nach dem Start.
Die Stelle t_0 ist eine Wendestelle des Graphen von f.
Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang.

(2 VP)

b) Deuten Sie den Inhalt der markierten Fläche im Sachzusammenhang.

Gegeben ist die Gleichung $\int_0^x g(t)dt = \int_0^{24} f(t)dt$.

Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt.

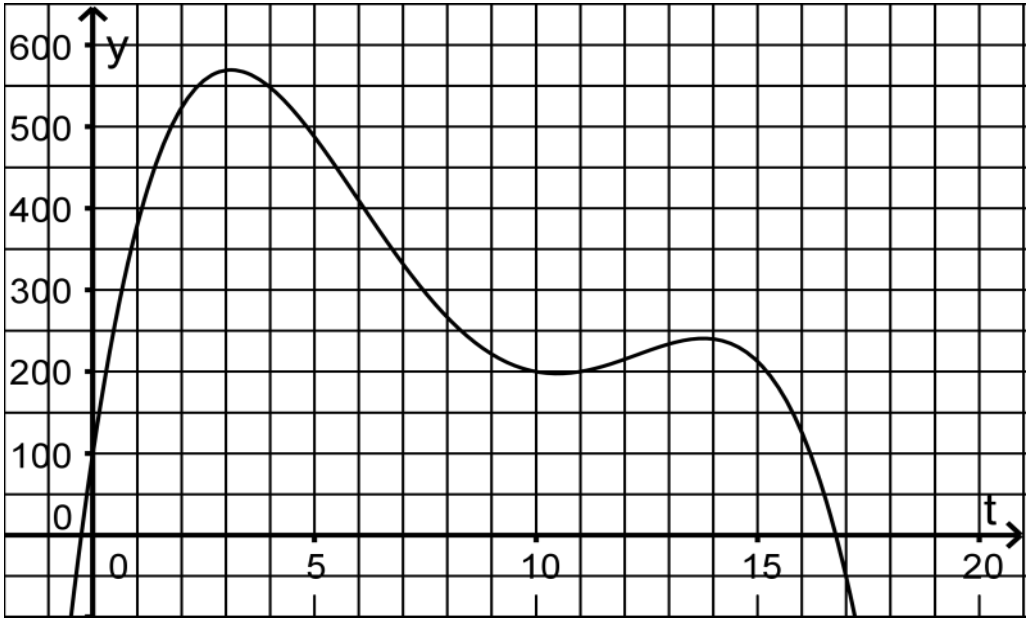
(3 VP)

Botschaft: Argumentieren und Kommunizieren

Botschaft: Gleichung interpretieren

Aufgabe A 2.1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und f(t) das Volumen in Kubikmetern.



Botschaft:
Arbeiten an gegebenen Graphen

bestimmen *ermitteln* *untersuchen*	• Art des Vorgehens frei wählbar (grafisch, rechnerisch), sofern nicht anders angegeben • nachvollziehbarer dokumentierter Lösungsweg

a)

Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

I $y = -0{,}3t^4 + at^2 + 100$, $a \in \mathbb{R}$

II $y = 8{,}5t^3 + 3{,}7t^2 + bt + 100$, $b \in \mathbb{R}$

Botschaft: Gleichung interpretieren

(5 VP)

beurteilen *begründen* *nachweisen* *zeigen*	• logisches Schließen bzw. Argumentieren

b) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann.
Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.
Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

(3,5 VP)

beschreiben	• keine Begründung

Botschaft: Argumentieren und Kommunizieren

Botschaft: Gleichung interpretieren

Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \le t \le 15$ durch die Funktion g mit $g(t) = 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t) = 0{,}2 \cdot \left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right)$ ist eine Stammfunktion von g.

c) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

(4,5 VP)

Zeitraum

$g(t) = 0 \Leftrightarrow t \cdot \left(2t^2 - 39t + 180\right) = 0$. Lösungen sind $t_3 = 0$, $t_4 = 7{,}5$ und $t_5 = 12$.

Wegen $g(3) = 97{,}2$, $g(8) = -12{,}8$ und $g(15) = 270$ nimmt das Wasser im Zeitraum zwischen 7,5 Stunden und 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn ab.

Botschaft:
„rechnerisch“ bedeutet nicht „ablesen der Zahlenwerte in der Wertetabelle des WTR“

Botschaft:
Kontrolle einer Handrechnung mit WTR möglich (Wertetabelle)

d) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten.
Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

d) Volumen (2 VP) (4,5 VP)

$$350 = V_0 + \int_0^3 g(t)dt \Leftrightarrow V_0 = 350 - \int_0^3 g(t)dt = 350 - \left(G(3) - G(0)\right) = 150{,}2$$

Zu Beobachtungsbeginn betrug das Wasservolumen etwa 150 m^3.

Zeitpunkt gleiches Wasservolumen (2,5 VP)

Es muss ein a mit $0 < a \leq 15$ geben mit $\int_0^a g(t)\,dt = 0$. Dies führt auf die Gleichung

$a^4 - 26a^3 + 180a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 \cdot \left(a^2 - 26a + 180\right) = 0$. Die einzige Lösung ist $a_1 = 0$.

Es gibt also keinen solchen Zeitpunkt.

Botschaft:
Integralfunktion von Hand auswerten in algebraisch machbaren Fällen möglich

Aufgabe A 2.2

Für jedes $c > 0$ ist eine Funktion h_c mit $h_c(x) = c \cdot \sin(cx)$ gegeben.

Eine Nullstelle von h_c ist 0, die benachbarte positive Nullstelle wird mit u bezeichnet.
Geben Sie den Wert von u in Abhängigkeit von c an.
Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \le x \le u$ mit der x-Achse einschließt.

(2,5 VP)

Wert von u (0,5 VP)

$$u = \frac{\pi}{c}$$

Flächeninhalt (2 VP)

$$A = \int_0^u c\sin(cx)dx = \left[-\cos(cx)\right]_0^u = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

Fundus, Ana 1 „Medikament“

- BW-Aufgabensammlung 2019

Botschaft:
Arbeiten an gegebenen Graphen

Botschaft:
Wachstum, aber keine spezifischen Kenntnisse erforderlich

Botschaft:
Gleichung interpretieren

Aufgabe Ana 1

Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut eines Patienten durch den Graphen der Funktion f in untenstehender Abbildung beschrieben. Dabei ist t die Zeit seit Verabreichung in Stunden und f(t) die Wirkstoffmenge in mg.
Bestimmen Sie die Wirkstoffmenge und deren momentane Änderungsrate acht Stunden nach Verabreichung.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Wirkstoffmenge mindestens 35 mg beträgt.
Ermitteln Sie die mittlere Wirkstoffmenge innerhalb der ersten vier Stunden.

b) Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit

$$g(t) = 80 \cdot \left(1 - e^{-0{,}05 \cdot t}\right) \quad ; \quad t \geq 0$$

(t in Minuten seit Infusionsbeginn, g(t) in mg).

Bestimmen Sie die Wirkstoffmenge, die sich langfristig im Blut befinden wird.
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge ständig zunimmt.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge $1 \frac{mg}{min}$ beträgt.
Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge während der ersten vier Stunden.

Gegeben ist die Gleichung $g(t+15) = g(t) + 30$.
Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt.

Fundus, Ana 2 „innermathematisch“

- BW-Aufgabensammlung 2019

Aufgabe Ana 2

Der Graph jeder Funktion g_a mit $g_a(x) = ax^2 + 6x + 1 \quad (a \neq 0)$ ist eine Parabel C_a.

Zeigen Sie, dass sich alle C_a im Punkt $P(0|1)$ berühren.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve S, auf der die Scheitelpunkte aller C_a liegen.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q auf S, der kein Scheitelpunkt einer Parabel C_a ist.

Botschaft:
Ortslinie

Fundus, Ana 3 „Temperatur“

- BW-Aufgabensammlung 2019

Aufgabe Ana 3

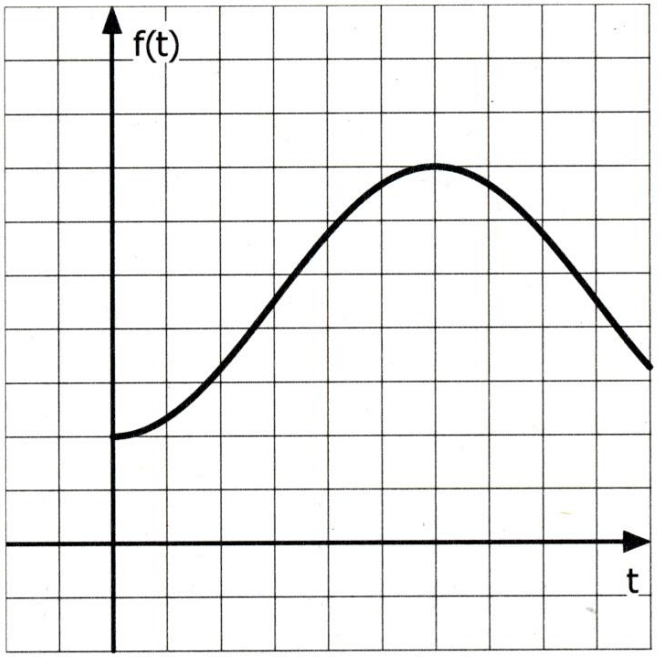
Der Temperaturverlauf an einem Sommertag wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 18 - 10\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right), \quad 0 \le t \le 24$$

(t in Stunden nach Mitternacht, f(t) in °C).

Ergänzen Sie in der Abbildung des Graphen von f die Skalierungen der Koordinatenachsen.

Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur zwischen 6 Uhr und 18 Uhr.



Botschaft:
Eintragungen durch den Schüler auf dem Aufgabenblatt

Fundus, Ana 6 „Wassertank“

- BW-Aufgaben-sammlung 2019

Botschaft:
Eintragungen durch den Schüler auf dem Aufgabenblatt

Aufgabe Ana 6

Ein quaderförmiger Wassertank hat eine Grundfläche von 2 m^2 und ist zunächst leer. Der Graph in untenstehender Abbildung 1 gibt die momentane Zuflussrate des Wassers in Kubikmeter pro Stunde über einen Zeitraum von sechs Stunden wieder.

Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate des Wassers.
Ermitteln Sie die Wassermenge im Tank nach 1,5 Stunden.
Geben Sie die maximale Wassermenge sowie die Wassermenge nach 6 Stunden an.
Bestimmen Sie, wie hoch das Wasser im Tank zum Zeitpunkt des stärksten Zuflusses steht.
Skizzieren Sie unter Verwendung dieser Ergebnisse den Graphen, der die Höhe des Wasserspiegels in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, in Abbildung 2.

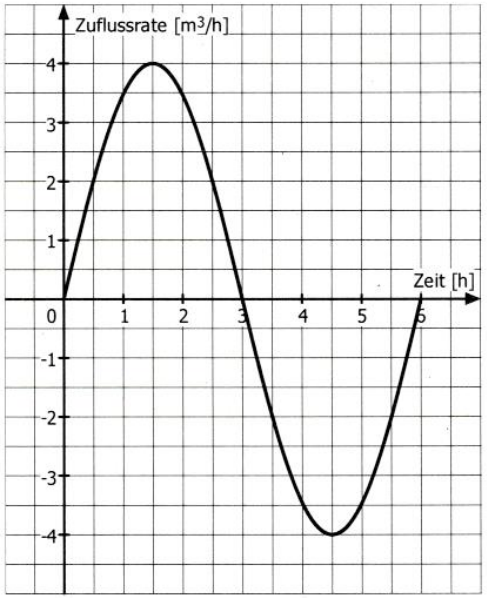


Abbildung 1

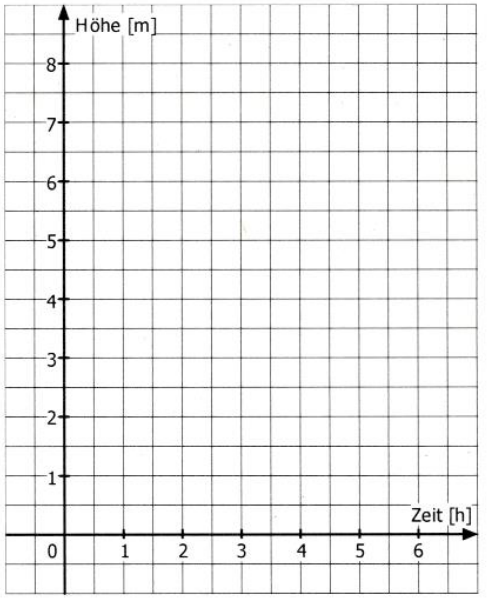


Abbildung 2

Fundus, Ana 4 „innermathematisch“

- BW-Aufgabensammlung 2019

Botschaft: gebrochenrationale Funktion

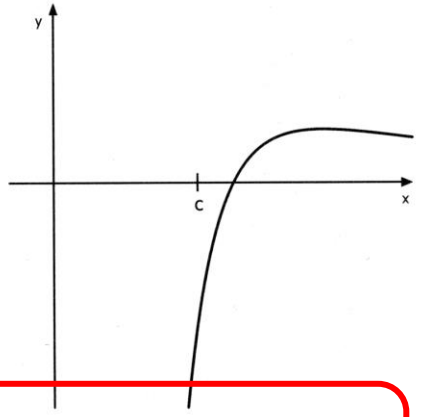
Botschaft: Bruchgleichung

Botschaft: Rotationskörper ohne Integralrechung

Aufgabe Ana 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{8}{x^2}-\frac{8}{x^3}$.

Ein Teil ihres Graphen K ist abgebildet.



a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge von f und Gleichungen der Asymptoten von K an. K besitzt einen Schnittpunkt mit der x-Achse und einen Hochpunkt. Bestimmen Sie deren Koordinaten. Untersuchen Sie f für $x<0$ auf Monotonie.

b) Die Tangente an K an der Stelle $x=2$ begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Wenn dieses Dreieck um die y-Achse rotiert, entsteht ein Körper. Berechnen Sie dessen Volumen.

c) Für die in der Abbildung eingetragene Stelle c wird die Integralfunktion I_c mit

$I_c(x)=\int_c^x f(t)dt \quad (x \geq c)$ betrachtet.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass I_c mindestens zwei Nullstellen besitzt.

d) K begrenzt mit der x-Achse und der Geraden x = u (u > 1) eine Fläche. Bestimmen Sie u so, dass diese Fläche den Inhalt 1 FE hat.

Fundus, Ana 5 „innermathematisch“

- BW-Aufgabensammlung 2019

Aufgabe Ana 5

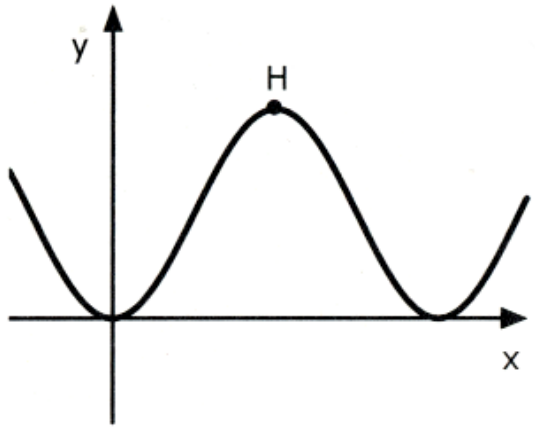
Abgebildet ist ein Teil des Graphen der Funktion g mit $g(x) = (\sin(x))^2$.

Bestimmen Sie die exakten Koordinaten des Hochpunktes H.

Es gibt reelle Zahlen a, b, d, so dass gilt:

$$g(x) = a \cdot \cos(bx) + d$$

Bestimmen Sie diese Zahlen.



Botschaft:
Kontrolle mit WTR
möglich (Wertetabelle)

Fundus, Ana 7 „innermathematisch“

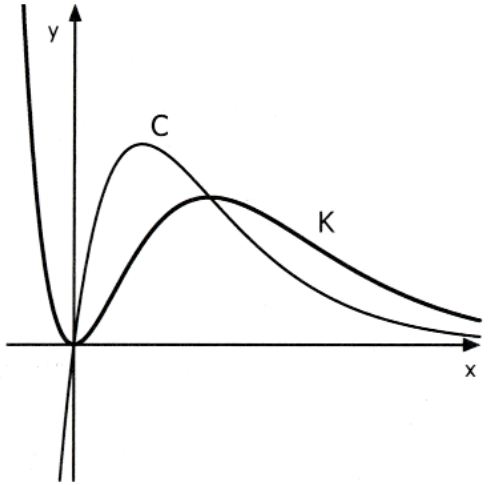
- BW-Aufgabensammlung 2019

Botschaft:
Elemente der Kurvendiskussion im WT möglich

Aufgabe Ana 7

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g durch
$f(x) = 8x \cdot e^{-x}$ und $g(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$.

Deren Graphen sind in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



a) Begründen Sie, dass C der Graph von f und K der Graph von g ist.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von C und K.

b) Die Gerade x = 1 schneidet K in P und C in Q.
P, Q und der Ursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts von K.
Geben Sie ohne weitere Rechnung an, für welche Werte von a die Gleichung $g(x) = a$ keine, eine bzw. mehrere Lösungen hat.

d) Es gibt Stammfunktionen F von f und G von g, sodass $F(x) - G(x) = g(x)$ gilt.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von C und K eingeschlossen wird.

Fundus, Ana 8 „innermathematisch“

- IQB-Pool 2017

Botschaft:
Funktionenscharen auch in größerem Umfang als bisher möglich.

Dabei aber nicht nur Kalkül.

Aufgabe Ana 8

Gegeben sind die Funktionen $f_k(x) = k^2x^3 - 6kx^2 + 9x \quad (k > 0)$.

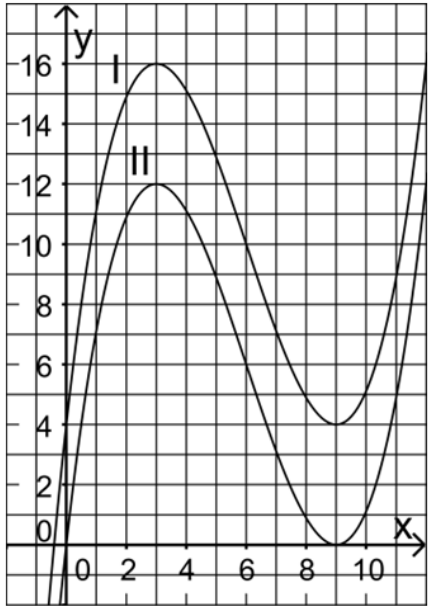
a) Geben Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

Weisen Sie nach, dass $f_k'(x) = 3 \cdot (kx - 1) \cdot (kx - 3)$ eine Gleichung der ersten Ableitung von f_k ist.

Für jeden Wert von k wird die Tangente an den Graphen von f_k im Wendepunkt $W\left(\frac{2}{k} \mid \frac{2}{k}\right)$ betrachtet.

Zeigen Sie, dass diese Tangenten für unterschiedliche Werte von k parallel zueinander sind.

b) Die Abbildung zeigt für einen bestimmten Wert von k den Graphen von f_k sowie den Graphen einer Funktion h mit $h(x) = f_k(x) + d$ mit $d \in \mathbb{R}$.
Ordnen Sie die beiden Funktionen jeweils einem der beiden Graphen I und II zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.
Bestimmen Sie die Werte von k und d.



Fundus,

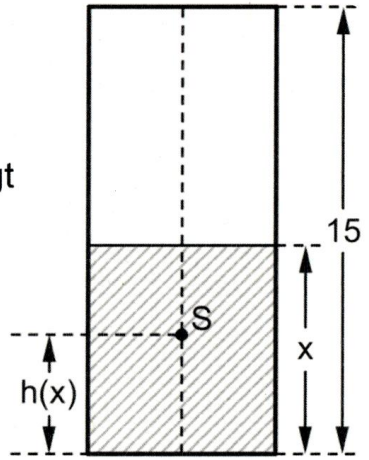
Ana 10 „Dose“

- IQB-2015 (modifiziert für BW)

Botschaft: prozessbezogene Kompetenz Kommunizieren

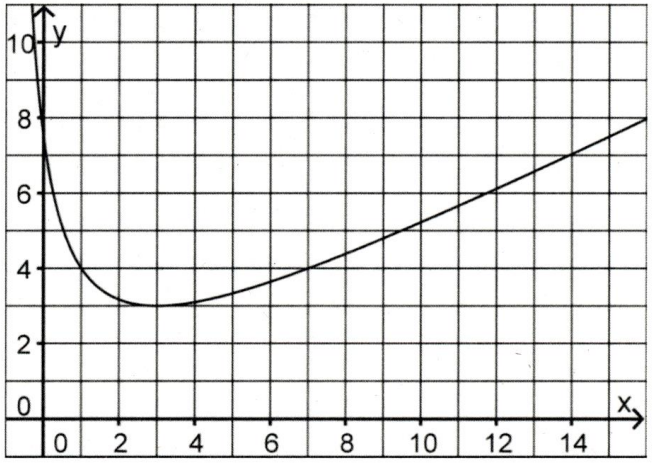
Aufgabe Ana 10

Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm (vgl. Abbildung rechts).



Die Abbildung unten zeigt den Graphen G_h der Funktion h, die für $0 \le x \le 15$ die Höhe des Schwerpunkts S über dem Dosenboden in Zentimetern angibt; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern. G_h hat den Tiefpunkt $T(3\,|\,3)$.

a) Ermitteln Sie grafisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt auf halber Höhe der Dose liegt.
Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist.
Beschreiben Sie die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs.
Stellen Sie für den Moment, in dem sich der Schwerpunkt in seiner geringsten Höhe befindet, Dose, Füllhöhe und Schwerpunkt schematisch dar und beschreiben Sie die Besonderheit dieser Situation.



Gebr.-rat. Funktionen:
weiterhin möglich, sofern sie auf Bruchgleichungen führen, die im Rahmen der erwarteten Kompetenzen liegen

Verstärkung im Bereich Argumentieren und Kommunizieren
in Übereinstimmung mit IQB-Aufgaben

Funktionenscharen
auch in größerem Umfang als bisher möglich, insbesondere Ortskurven

Aufgabenformen:
Arbeiten an gegebenen Graphen. Eintragungen auf Schülerblatt
Gleichung interpretieren

WTR Wertetabelle:

Kontrolle von Hand-rechnungen möglich.

Kein Lösen von Gleichungen durch Probieren.

Algebraische Anforderungen
Kalkül nimmt zu, dominiert aber nicht

Größerer Anteil innermathe-matischer Aufgaben möglich

Mustersatz und Fundus 2019
Geometrie

Erläuterungen und Hinweise

Mustersatz - Pflichtteil

Botschaft:
Keine Veränderungen zu den bisher üblichen Aufgabenstellungen.

Aufgabe 5

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 12 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

(3 VP)

Aufgabe 6

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.
b) Berechnen Sie den Abstand von g und E.
c) Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Geraden g an E. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

(4,5 VP)

Mustersatz, WT Geometrie B 1 „Turm“

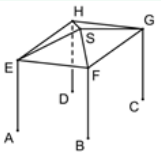
- Vgl. ursprünglicher HT 2017 (WTR-Anpassung)

Botschaft:
Keine inhaltlichen Erweiterungen

Botschaft:
etwas textlastiger (wie angekündigt)
Lösung insgesamt aber nicht „schreiblastiger“ als sonst

Botschaft:
Argumentieren und Kommunizieren

Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden. In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten modellhaft durch die Punkte A(2 | –3 | –0,5), B, C und D(–3 | –2 | –0,5) sowie E(2 | –3 | 4), F(3 | 2 | 4), G(–2 | 3 | 4) und H(–3 | –2 | 4) dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt S(0 | 0 | 5). Dabei beschreibt die x_1x_2-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.



a) Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist.
Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L.
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

(4 VP)

b) An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird.
Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und $\vec{v}$ bekannt sind.

(2 VP)

c) Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2,10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte. Berechnen Sie das Verhältnis der Längen dieser beiden Abschnitte.

(2,5 VP)

d) Es soll eine vertikale Kletterstange aufgestellt werden, deren Fußpunkt im Modell durch einen Punkt P der x_1x_2-Ebene beschrieben wird. Die Kletterstange soll von dem Pfosten, der durch die Strecke AE dargestellt wird, doppelt so weit entfernt sein wie von dem Pfosten, der durch die Strecke BF dargestellt wird. Bestimmen Sie für zwei mögliche Positionen der Kletterstange jeweils die Koordinaten von P.

(1,5 VP)

Mustersatz, WT Geometrie B 2

- Ursprünglicher HT 2017 (WTR-Anpassung)

Botschaft:
rein innermathematische Aufgabe im WT möglich

Gegeben sind die Punkte A(6|1|0), B(4|5|−4) und C(−2|8|2).

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel besitzt.
Die drei Punkte liegen in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Es gibt einen Punkt D, für den das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten von D.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks 54 FE beträgt.
(Teilergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$)

(5 VP)

b) Es gibt Pyramiden mit der Grundfläche ABCD, die das Volumen 108 VE haben.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze einer solchen Pyramide.

(2,5 VP)

c) Ein Teil der Fläche des Rechtecks ABCD befindet sich unterhalb der x_1x_2-Ebene.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Teilfläche.

(2,5 VP)

Fundus, Geo 1 „Kunstwerk“

- IQB-Sammlung 2015, modifiziert für BW
- 2016 im Rahmen der FoBi vorgestellt

Fundus, Geo 2 „U-Boote“

- IQB-Sammlung 2015, modifiziert für BW
- 2016 im Rahmen der FoBi vorgestellt

Die Bewegungen zweier Forschungs-U-Boote U_1 und U_2, die von einer Forschungsstation mithilfe eines Sonarsystems geortet werden, sollen modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden. Im Modell, das den Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.27 Uhr erfasst, bewegen sich beide U-Boote geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit, U_1 entlang der Geraden g_1, U_2 entlang der Geraden g_2. Die Positionen von U_1 um 12.20 Uhr und 12.21 Uhr werden durch die Punkte $P_0(4|14|-5)$ bzw. $P_1(6|11|-5)$ dargestellt, die Positionen von U_2 zu denselben Zeitpunkten durch $Q_0(11|9|-15)$ bzw. $Q_1(9|6|-13)$.
Die Wasseroberfläche wird durch die x_1x_2-Ebene, die Lage der Forschungsstation durch den Punkt $F(12|11{,}5|0)$ beschrieben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Realität.

Botschaft: Bewegungsaufgaben weiterhin möglich

Botschaft: textlastiger Vorspann denkbar

Fundus, Geo 3 „Geradenschar“

- Haupttermin 2015
- Ursprüngliche GTR-Version:

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel von g_4 und E.
Für welche Werte von a mit $-10 \le a \le 10$ hat der Schnittwinkel von g_a und E die Weite 10°?

- Angepasste WTR-Version:

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel von g_4 und E.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der sich derjenige Wert von a bestimmen lässt, für den der Schnittwinkel von g_a und E die Weite 10° hat.

Botschaft:
Aufstellen „komplexer“
Gleichungen weiterhin möglich,
aber ggf. ohne sie zu lösen

Fundus, Geo 4

„Terrasse“

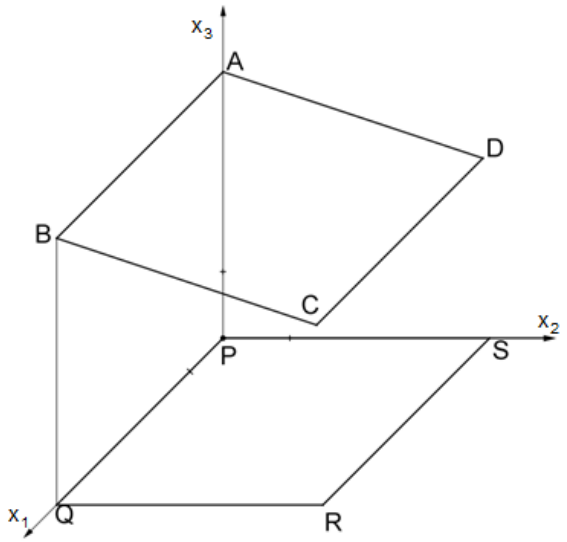
- Haupttermin 2015

Botschaft:
Unverändert
verwendbar

Botschaft:
„W-Fragen“ durch
Operatoren ersetzen

Aufgabe Geo 4

Über einer Terrasse ist als Sonnenschutz eine Markise an einer Hauswand befestigt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte P(0 | 0 | 0), Q(5 | 0 | 0), R(5 | 4 | 0), S(0 | 4 | 0) die Eckpunkte der Terrasse dar. Die Markise wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten A(0 | 0 | 4), B(5 | 0 | 4), C(5 | 3,9 | 2,7), D(0 | 3,9 | 2,7) beschrieben (alle Koordinatenangaben in Meter). Die Lage der Hauswand wird durch die x_1x_3-Ebene beschrieben.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Lage der Markise beschreibt.
Berechnen Sie den Winkel zwischen Markise und Hauswand.

b) In der Mitte zwischen Q und R steht eine 30 cm hohe Stablampe. Am Markisenrand CD wird ein senkrecht nach unten hängender Regenschutz angebracht, der genau bis auf die Terrasse reicht. Bei starkem Wind schwingt er frei um CD.
Untersuchen Sie, ob der Regenschutz dabei die Stablampe berühren kann.
Berechnen Sie den Abstand von der Hauswand, den die Stablampe auf der Terrasse höchstens haben darf, damit dies nicht passiert.

Kann der Regenschutz dabei die Stablampe berühren? **Ht 2015**
Welchen Abstand von der Hauswand darf die Stablampe auf der Terrasse höchstens haben, damit dies nicht passiert?

(4 VP)

Geometrie
keine inhaltlichen Erweiterungen

Längere Aufgabentexte sind möglich

Verstärkung im Bereich Argumentieren und Kommunizieren
in Übereinstimmung mit IQB-Aufgaben

Algebraische Anforderungen
Kalkül nimmt zu, dominiert aber nicht

Komplexe Gleichungen
nicht lösen aber aufstellen und interpretieren lassen

Größerer Anteil innermathematischer Aufgaben möglich

Bewegungs-aufgaben
sind weiterhin möglich

Mustersatz und Fundus 2019
Stochastik

Erläuterungen und Hinweise

Mustersatz - Pflichtteil

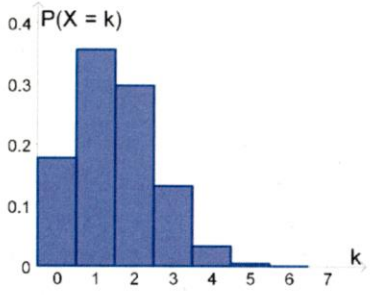
Aufgabe 7

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

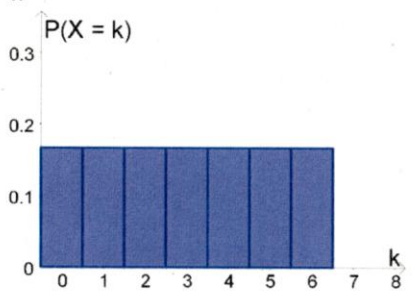
a) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

b) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen X dar:

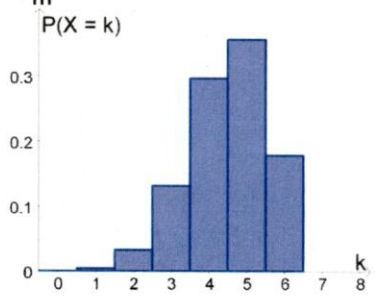
I



II



III



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist.
Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

(2,5 VP)

Botschaft:
Keine Veränderungen zu den bisher üblichen Aufgabenstellungen
-
kurze Stochastikaufgabe hier mit viel Text.

Mustersatz, WT Stochastik C 1

„Lampen“

- IQB-Sammlung 2015, modifiziert für BW
- 2016 vorgestellt im Rahmen der FoBi vorgestellt

Botschaft:

Viel Text ist möglich.

Die Firmen A und B stellen Lampen her und liefern diese anschließend an Händler aus. Der Anteil defekter Lampen unter ausgelieferten Lampen der Firma A beträgt im Mittel 9 %, unter ausgelieferten Lampen der Firma B im Mittel 7 %. Im Folgenden soll sowohl für die Lampen der Firma A als auch für die Lampen der Firma B angenommen werden, dass diese unabhängig voneinander Defekte aufweisen.

a) Betrachtet werden Lampen, die von der Firma A ausgeliefert wurden.
Zehn Lampen werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens sechs Lampen nicht defekt sind.
500 Lampen werden zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der defekten Lampen vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens 10 % abweicht.
(3 VP)

b) Einem Händler werden Lampen geliefert, die in Kartons verpackt sind; jeder Karton enthält 30 Lampen. Der Händler wählt aus jedem Karton zwei Lampen zufällig aus und prüft diese. Sind bei einem Karton die beiden ausgewählten Lampen nicht defekt, so nimmt er diesen Karton an, ansonsten nicht.
Ein Karton enthält sechs defekte Lampen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt.
Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt, mindestens 50 % beträgt.
(3,5 VP)

c) Ein Discounter bezieht 35 % der von ihm angebotenen Lampen von der Firma A und 65 % von der Firma B. Der Einkaufspreis beträgt 0,98 Euro für eine Lampe der Firma A und 1,02 Euro für eine Lampe der Firma B. Im Zusammenhang mit dem Einkauf findet keine Prüfung der Lampen statt. Für Kunden des Discounters sind die Lampen der beiden Firmen nicht unterscheidbar; der Verkaufspreis beträgt unabhängig vom Hersteller 1,49 Euro. Jede von einem Kunden ausgewählte Lampe wird an der Kasse geprüft: Ist eine Lampe defekt, so wird sie entsorgt.
Bestimmen Sie den im Mittel pro Lampe zu erwartenden Gewinn des Discounters.
(3,5 VP)

Abitur 201

Mustersatz, WT Stochastik C 1

„Lampen“

Botschaft:
Systematisches Probieren mit dem WTR, **nur bei diskreten** Fragestellungen!

- IQB-Sammlung 2015, modifiziert für BW
- Umkehraufgabe in Aufgabe b) bzgl. p ist **diskretisiert**:

Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt, mindestens 50 % beträgt.

Maximale Anzahl der defekten Lampen

a: Anzahl der defekten Lampen, p: Wahrscheinlichkeit, dass Händler den Karton annimmt

$$p(a) = \frac{30-a}{30} \cdot \frac{29-a}{29}, \; p(8) \approx 0{,}531, \; p(9) \approx 0{,}483$$

Es dürfen höchstens 8 defekte Lampen im Karton sein.

Mustersatz, WT Stochastik C 2

„Haushalte“

- Ursprünglicher HT 2017

Botschaft:
„Kommunizieren“
Daten aus umfangreicher (?) Basis entnehmen.

Botschaft:
Unverändert verwendbar.

Botschaft:
Mit WTR ist Hypothesentest rechtsseitig aufwändiger als linksseitig, dennoch aus naheliegenden Gründen nicht höher dotiert.

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland.

1-Personen-Haushalte	40,5 %
2-Personen-Haushalte	34,5 %
3-Personen-Haushalte	12,5 %
4-Personen-Haushalte	9,2 %
Haushalte mit mindestens 5 Personen	3,3 %

a) Für eine Umfrage im Jahr 2013 sollten 100 Haushalte zufällig ausgewählt werden. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Es wurden genau vierzig 1-Personen-Haushalte ausgewählt.“
B: „Mindestens die Hälfte der ausgewählten Haushalte waren Mehrpersonenhaushalte.“
C: „Unter den ersten zehn ausgewählten Haushalten war kein 4-Personen-Haushalt und unter den restlichen neunzig Haushalten waren höchstens fünf 4-Personen-Haushalte.“

(3,5 VP)

b) Ermitteln Sie, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte sind.

(2 VP)

c) Im Jahr 2013 lebten in Deutschland insgesamt etwa 80 Millionen Menschen. Bestimmen Sie für das Jahr 2013 einen Näherungswert für die Gesamtzahl der Haushalte in Deutschland und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(2 VP)

d) Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5 % die Nullhypothese
H_0: „Der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte beträgt höchstens 40,5 %.“
getestet werden.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(2,5 VP)

Fundus, Sto 1 „Glücksrad“

- BW-Aufgabensammlung 2019
  - W-Fragen → Operatoren

„Wie oft…“

Ein Glücksrad besteht aus drei farbigen Sektoren mit den Mittelpunktswinkeln 180° (rot), 90° (gelb) und 90° (blau).

a) Das Glücksrad wird zehn Mal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Die Farbe Blau tritt genau vier Mal auf.
B: Die Farbe Blau tritt mindestens vier Mal auf.

b) Bestimmen Sie, wie oft man das Glücksrad mindestens drehen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen

Eine Klasse setzt dieses Glücksrad beim Schulfest ein, wobei folgende Spielregeln gelten: Für einen Einsatz von einem Euro darf ein Spieler das Glücksrad drei Mal drehen. Wenn drei Mal dieselbe Farbe erscheint, erhält er zwei Euro zurück; wenn drei verschiedene Farben erscheinen, bekommt er nichts ausbezahlt; in allen anderen Fällen erhält er seinen Einsatz zurück.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Spieler Verlust macht, wenn er dieses Spiel einmal spielt.

d) Die Klasse will im nächsten Jahr zwar die Spielregeln beibehalten, aber durch Veränderung der Sektorengrößen ihre Gewinnwahrscheinlichkeit erhöhen. Dabei soll der rote Sektor weiterhin doppelt so groß sein wie der gelbe.
Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Drehung „gelb“ erscheint.
Berechnen Sie denjenigen Wert von p, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler Verlust macht, am größten ist.

Fundus, Sto 1 „Glücksrad“

- BW-Aufgabensammlung 2019
  - Teilaufgabe d)

Berechnen …

Botschaft:
nicht diskret → kein systematisches Probieren mit dem WTR erlaubt.

nicht diskret → muss mit Mitteln der Algebra / Analysis lösbar sein!

Die Klasse will im nächsten Jahr zwar die Spielregeln beibehalten, aber durch Veränderung der Sektorengrößen ihre Gewinnwahrscheinlichkeit erhöhen. Dabei soll der rote Sektor weiterhin doppelt so groß sein wie der gelbe.
Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Drehung „gelb“ erscheint.
Berechnen Sie **denjenigen Wert von p**, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler Verlust macht, am größten ist.

Die Funktion f beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler Verlust macht, in Abhängigkeit von p.

Es ist $f(p) = 6 \cdot p \cdot 2p \cdot (1 - p - 2p) = 12p^2 \cdot (1 - 3p) = 12p^2 - 36p^3$, $0 \le p \le \frac{1}{3}$

Bestimme p so, dass f(p) maximal ist.

$f'(p) = 24p - 108p^2 = 108p \cdot (\frac{2}{9} - p)$, somit gilt $f'(p) = 0$ für $p = 0$ (irrel.) und $p = \frac{2}{9}$.

Da $f(0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler Verlust macht,

für $p = \frac{2}{9}$ maximal.

Fundus, Sto 2 „Schulfest“

- BW-Aufgabensammlung 2019
  - W-Fragen → Operatoren

„Wie groß ist die Wahrsch…“

Bei einem Schulfest gibt es verschiedene Attraktionen.

a) Auf einem Tisch liegen verdeckt fünf Spielkarten. Zwei der Karten sind Joker. Hilde und Franz decken abwechselnd je eine Karte auf. Es gewinnt, wer zuerst einen Joker zieht. Hilde beginnt das Spiel.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Franz gewinnt.
B: Hilde gewinnt.

b) Das Glücksrad der Klasse 5a hat 32 gleich große Felder. Davon sind 8 als Gewinnfelder markiert. Wenn beim Drehen eines dieser Felder erscheint, gewinnt man.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 50 Spielen mindestens zehn Mal gewinnt.
Das Glücksrad der Klasse 5b hat 30 gleich große Felder. Die Wahrscheinlichkeit, bei 50 Spielen mindestens zehn Mal zu gewinnen, soll mindestens 95 % betragen.
Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Felder, die als Gewinnfelder markiert werden müssen.

c) Bei einem Spielautomaten erscheint auf Knopfdruck ein Bildsymbol: entweder eine Sonne oder ein Mond. Für einen Einsatz von einem Euro darf man zwei Mal nacheinander drücken. Erscheint zwei Mal die Sonne, so erhält man zwei Euro ausbezahlt; erscheint zwei Mal der Mond, so erhält man einen Euro ausbezahlt; in den anderen Fällen erhält man nichts ausbezahlt.
Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit für Sonne sein muss, damit das Spiel fair ist.

Fundus, Sto 2 „Schulfest“

- BW-Aufgabensammlung 2019
  - Teilaufgabe b) angepasst:

Botschaft:
Kein systematisches Probieren bei **stetigen Größen**!

ursprünglich:

Beim Glücksrad der Klasse 5b beträgt die Wahrscheinlichkeit, bei 50 Spielen mindestens zehn Mal zu gewinnen, 99%.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn in einem Spiel auf zwei Dezimalen genau.

Diskret oder nicht?

neu:

Das Glücksrad der Klasse 5b hat **30 gleich große Felder**. Die Wahrscheinlichkeit, bei 50 Spielen mindestens zehn Mal zu gewinnen, soll mindestens 95 % betragen.
Bestimmen Sie **die Mindestanzahl** der Felder, die als Gewinnfelder markiert werden müssen.

Deutliche Diskretisierung

Fundus, Sto 3 „Hotel“

- BW-Aufgabensammlung 2019
  - W-Fragen → Operatoren

„Wieviel Reservierungen…“

Botschaft:
Auch Argumentieren beim Testen möglich (hier: Testdesign).

Ein Hotel hat 150 Zimmer. Für sein beliebtes Wochenendangebot liegen immer deutlich mehr als 150 Anfragen für Reservierungen vor. Da die Hotelleitung im vergangenen Jahr die Erfahrung gemacht hat, dass im Mittel nur 90 % der Reservierungen in Anspruch genommen werden, entschließt sie sich nun, immer 160 Reservierungen anzunehmen. Die Anzahl der Reservierungen, die tatsächlich in Anspruch genommen werden, wird durch eine Zufallsvariable X beschrieben. Diese wird als binomialverteilt angenommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   E_1: Genau 150 Reservierungen werden in Anspruch genommen.
   E_2: Es müssen Gäste, die reserviert haben, abgewiesen werden.
   E_3: Alle Gäste, die ihre Reservierung in Anspruch nehmen wollen, bekommen ihr Zimmer.

b) Falls Gäste, die reserviert haben, wegen Überbuchung kein Zimmer bekommen, müssen sie auf Kosten des Hotels in einem teureren Hotel in der Nähe untergebracht werden. Die Hotelleitung will daher erreichen, dass die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall unter 1 % liegt.
   Bestimmen Sie die maximale Anzahl an Reservierungen, die sie dann höchstens annehmen darf.

Die Hotelleitung überlegt, ob sie das Hotel mit einer Sauna ausstatten soll. Das Vorhaben soll aber nur dann umgesetzt werden, wenn mehr als 20 % der Gäste dieses kostenpflichtige Angebot auch nutzen würden. Die Nullhypothese

H_0: *„Höchstens 20 % der Gäste würden die Sauna nutzen.“*

soll auf der Basis einer Umfrage bei 300 Gästen auf einem Siginifikanzniveau von 5 % getestet werden.

c) Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

d) Vor der Konzeption des Tests stellte die Hotelleitung folgende Überlegungen an:
   I: Wenn die Sauna nicht gebaut wird, obwohl sie mehr als 20 % der Gäste nutzen würden, entgehen dem Hotel zusätzliche Einnahmen.
   II: Wenn die Sauna gebaut wird, obwohl sie höchstens 20 % der Gäste nutzen, entstehen dem Hotel finanzielle Verluste.
   Für einen dieser beiden Fälle kann die Wahrscheinlichkeit des Eintretens mit obigem Test auf 5 % begrenzt werden.
   Entscheiden Sie, welcher der beiden Fälle dies ist.
   Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Fundus, Sto 4 „Abitur“

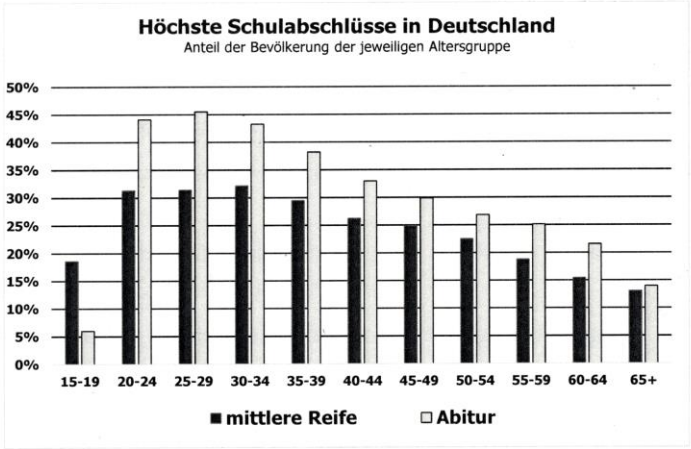
- BW-Aufgabensammlung 2019
  - Identisch übernommen

Botschaft:
„Kommunizieren“
Daten aus umfangreicher (?)
Basis entnehmen.

Untersuchen Sie, ob diese Aussage mit den obigen Daten vereinbar ist.

Botschaft:
„Argumentieren“

Das folgende Diagramm zeigt Daten des statistischen Bundesamts zum jeweils höchsten erreichten Schulabschluss in verschiedenen Altersgruppen (Stand 2012):



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte 20-24-jährige Person kein Abitur hat.
Eine andere Statistik gibt an, dass 2012 die Anzahl der Personen mit mittlerer Reife im Alter von 45 bis 49 Jahren größer war als die entsprechende Anzahl bei den 35-39-jährigen Personen.
Untersuchen Sie, ob diese Aussage mit den obigen Daten vereinbar ist.

b) Zwanzig Personen im Alter von 55 bis 59 Jahren werden zufällig ausgewählt.
Begründen Sie, dass die Anzahl der Personen mit Abitur in dieser Gruppe mit einer binomialverteilten Zufallsvariablen beschrieben werden kann.
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: In dieser Gruppe haben genau sechs Personen Abitur.
B: In dieser Gruppe haben höchstens vier Personen Abitur.

c) Zwölf Personen nehmen an einem Abitur-Fernkurs teil. Zehn von ihnen haben bereits die mittlere Reife. Bei jedem von ihnen liegt die Erfolgschance bei 80%. Bei den beiden anderen beträgt die Erfolgschance jeweils nur 60%.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
C: Alle zehn Personen mit mittlerer Reife sind erfolgreich.
D: Mindestens elf Personen schließen den Fernkurs erfolgreich ab.

Abitur 201

Fundus, Sto 5 „Biathlon“

- HT 2015

Bei einem Biathlonwettbewerb läuft ein Athlet eine 2,5 km lange Runde, dann schießt er liegend fünf Mal; anschließend läuft er eine zweite Runde und schießt stehend fünf Mal; nach einer dritten Runde erreicht er das Ziel. Für jeden Fehlschuss muss er direkt nach dem Schießen eine 200 m lange Strafrunde laufen. Aufgrund der bisherigen Schießleistungen geht der Trainer davon aus, dass der Athlet stehend mit 88 % und liegend mit 93 % Wahrscheinlichkeit trifft. Es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Ergebnisse der einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal trifft.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet im gesamten Wettbewerb höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss.

c) Der Athlet möchte seine Leistungen im Stehendschießen verbessern.
Gegeben ist die Ungleichung $p^5 + 5 \cdot p^4 \cdot (1-p) \geq 0{,}95$, wobei p die Trefferwahrscheinlichkeit im Stehendschießen ist.
Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf diese Ungleichung führt.

Fundus, Sto 5 „Biathlon“

- HT 2015
  - Teilaufgabe c) angepasst:

HT 2015

Der Athlet möchte seine Leistungen im Stehendschießen verbessern und künftig mit über 95% Wahrscheinlichkeit bei fünf Schüssen mindestens vier Mal treffen.
Welche Trefferwahrscheinlichkeit muss er dafür mindestens erreichen?

Bei einer solchen Frage nach p im stetigen Fall wäre systematisches Probieren erforderlich.

Botschaft:
Kein systematisches Probieren bei **stetigen Größen**!

Sto 5

Der Athlet möchte seine Leistungen im Stehendschießen verbessern.
Gegeben ist die Ungleichung $p^5 + 5 \cdot p^4 \cdot (1-p) \geq 0{,}95$, wobei p die Trefferwahrscheinlichkeit im Stehendschießen ist.
Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf diese Ungleichung führt.

Botschaft:
Ungleichung deuten!

Fundus, Sto 6 „Tanzgruppe“

- HT 2016
  - W-Fragen
    → Operatoren

„Wie groß ist die…“

Eine Tanzgruppe besteht aus 8 Anfängerpaaren und 4 Fortgeschrittenenpaaren. Aus der Erfahrung vergangener Jahre weiß man, dass Anfängerpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % bei den abendlichen Tanzstunden anwesend sind, Fortgeschrittenenpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Man geht davon aus, dass die Entscheidungen der Tanzpaare über die Teilnahme an der Tanzstunde voneinander unabhängig sind.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend alle Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 11 Paare anwesend sind.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 11 Paare anwesend sind.

Einfache kombinatorische Überlegungen,
mit WTR etwas aufwändiger
als mit GTR, aber zumutbar.

Abitur 2019/2020

Stochastik
keine
inhaltliche
Erweiterung

Systematisches
Probieren
nur bei diskreten
Fragestellungen

Verstärkung im Bereich
Argumentieren und
Kommunizieren
in Übereinstimmung mit
IQB-Aufgaben

Algebraische
Anforderungen
Kalkül nimmt zu,
dominiert aber nicht

Komplexe
Gleichungen oder
Ungleichungen
nicht lösen aber
aufstellen oder
interpretieren lassen

Einfache
kombinatorische
Überlegungen
sind weiterhin
möglich.

Für alle Sachgebiete gilt:

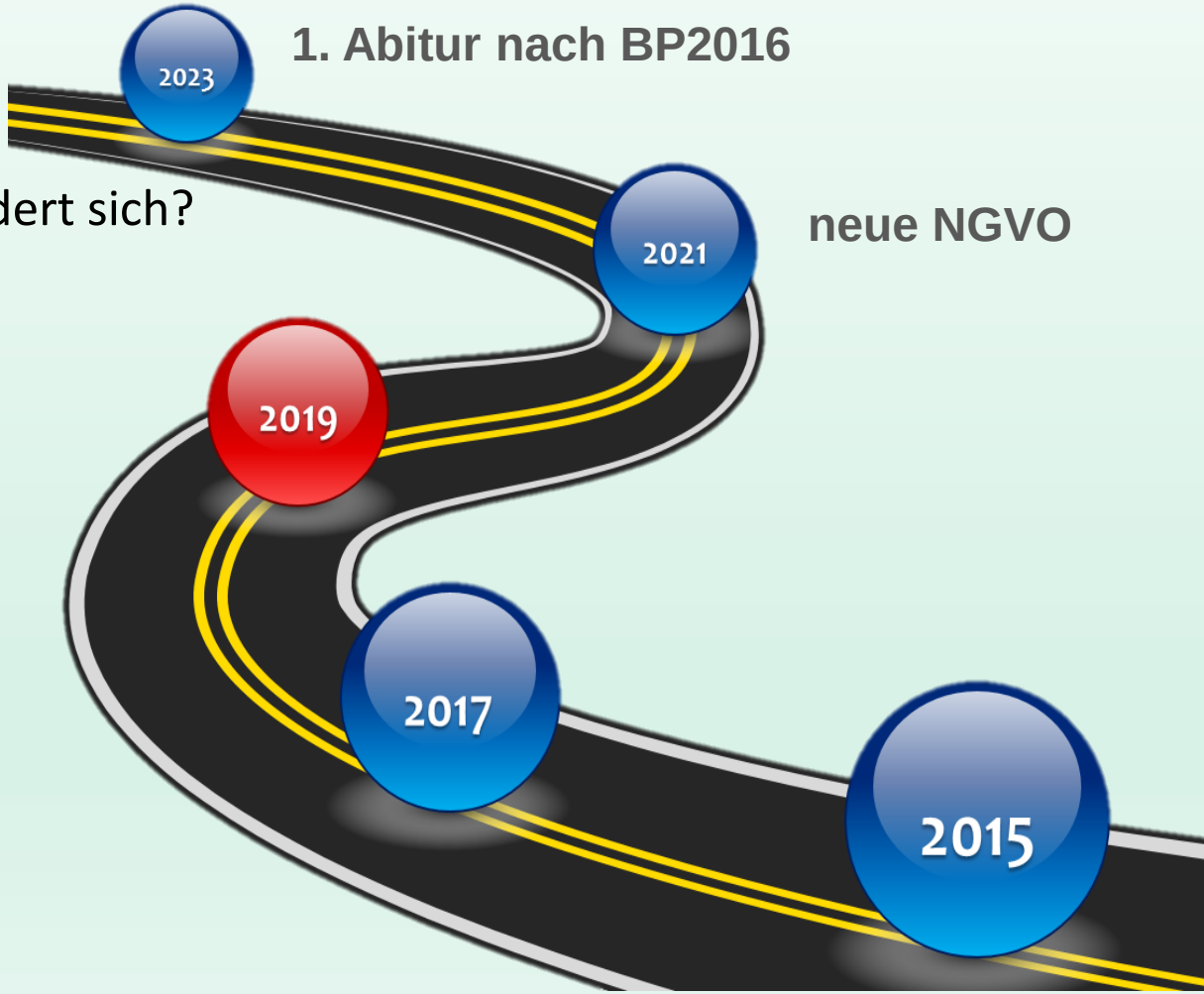
Größerer Anteil innermathematischer Aufgaben möglich

Verstärkung im Bereich Argumentieren und Kommunizieren in Übereinstimmung mit IQB-Aufgaben

Algebraische Anforderungen
Kalkül nimmt zu, dominiert aber nicht

Komplexe Gleichungen oder Ungleichungen nicht lösen aber aufstellen oder interpretieren lassen

Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik in den Jahren 2019 und 2020



1. Rahmenbedingungen

Was bleibt – was ändert sich?

- Inhalte
- Gleichungslehre
- Schülerlösungen
- Operatoren

2. Aufgaben

Musteraufgabensatz

Aufgabenfundus

Hinweise für die Fortbildner / Fachberater / innen zur vorliegenden Power-Point-Präsentation

Hinweise für die Fortbildner / Fachberater / innen

1. Die Folien können in den Fortbildungen verwendet werden. Dazu können sie selbstverständlich umgestellt und Formatierungen oder Animationen können verändert werden. Der Wortlaut der vorhandenen Texte sollte nicht verändert werden.
2. Die Folien 1 bis 78 sollen in einer Datei im pdf-Format an die Teilnehmer weitergegeben werden, damit jede(r) Kollege/in die gleiche Informationsgrundlage hat. Es wurde versucht darauf zu achten, dass in der pdf keine vermeidbaren Überdeckungen von Textfeldern auftreten.
3. Die Folien können in gedruckter Form auch auszugsweise weitergegeben werden.
4. Im Folgenden ein Vorschlag zur Vorgehensweise in der Fortbildung.

Vorschlag einer möglichen Agenda für die Fortbildungen

Beginn: 14.00 Uhr

Input (60 min)

Vorstellung Konvolut
Kompetenzliste für die Schuljahre ab 2019/20
Anforderungen im Bereich der Gleichungslehre
Anforderungen Schülerlösungen / Operatoren
Allgemeine Botschaften

Vorstellung einer Stochastik-Musteraufgabe unter besonderer Berücksichtigung des WTR-Einsatzes (45 min)

Wo findet man beim Taschenrechner die Verteilungen?
Grundaufgaben zur Binomialverteilung: Suche nach n, k
Hypothesentest mit dem WTR
Tricks und Kniffe, z. B. Gegenwahrscheinlichkeit einer Wahrscheinlichkeit, die schon bestimmt wurde, mit dem WTR ausrechnen

Pause (20 min)

Vorstellung Musteraufgabe(n) aus dem Bereich der Analysis (45 min)

Schwerpunkt: Inhalte und Botschaften, welche wir den Lehrkräften übermitteln wollen
WTR-Einsatz nur am Beispiel einiger ausgewählter Teilaufgaben

Puffer: Vorstellung Musteraufgabe(n) aus dem Bereich der Geometrie

Bekanntgaben, Ausblick, Evaluation (10 min)

17.00 Uhr: Ende