Erwartete Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre

0. Grundtechniken

- Faktorisierung durch Ausklammern
- nicht: Faktorisierung in schwierigen Fällen
  (Anwendung einer binomischen Formel „rückwärts“, Polynomdivision)
- Substitution
- Einsetzungsverfahren
- Fallunterscheidung in einfachen Fällen (z.B. bei Gleichungen mit Parametern)

1. Lineare Gleichungen

- auch: Untersuchung der Lösbarkeit linearer Gleichungen mit Parameter

Beispiel

1.1 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von a: $ax = x + 3$

2. Quadratische Gleichungen

- Lösen quadratischer Gleichungen mit beliebigen Koeffizienten
- Untersuchung der Lösbarkeit quadratischer Gleichungen mit Parameter

Beispiele

2.1 $\frac{5}{2}x^2 - 4x = 2$

2.2 $2x^2 = 1{,}8x + 0{,}4$ (mit WTR)

2.3 $2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{7} = 0$ (mit WTR)

2.4 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von u: $9x^2 - 3ux + 1 = 0$

3. Potenzgleichungen

- Lösen von Potenzgleichungen mit natürlichen Exponenten
- bei negativen Exponenten: siehe 6.4

Beispiele

3.1 $4x^3 + 35 = 21$

3.2 Bei einer verbeulten Münze ist die Wahrscheinlichkeit, bei zwölf Würfen kein „Wappen“ zu erhalten, etwa 5%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt „Wappen“ im dreizehnten Wurf? (mit WTR)

4. Exponentialgleichungen

- Lösen von Exponentialgleichungen mit beliebiger Basis

Beispiele

4.1 $4 \cdot e^{-x} = 1$

4.2 $2 \cdot 3^{x} = 8$

4.3 $2 \cdot e^{2x+1} = 3$ (mit WTR)

4.4 Wie oft muss man einen fairen Würfel mindestens werfen, um mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit mindestens einmal eine „Sechs“ zu erhalten? (mit WTR)

5. Wurzelgleichungen

- Lösen von Wurzelgleichungen durch Quadrieren, ggf. nach Isolieren des Wurzelterms (nur im Zusammenhang mit Abstandsberechnungen)
- nicht: Mehrfaches Quadrieren (bei mehreren Wurzeltermen)
- nicht: Betrachtung der Definitionsmenge, Überprüfung einer ermittelten Lösung
- nicht: Optimierung bei Wurzelfunktionen mit Mitteln der Differenzialrechnung

Beispiele

5.1 Welche Punkte der Normalparabel haben den Abstand $\sqrt{20}$ vom Ursprung?

5.2 Welche Punkte der Geraden g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ haben vom Punkt $A(3\,|\,5\,|\,3)$ den Abstand $\sqrt{13}$?

6. Bruchgleichungen

- Lösen von Bruchgleichungen, die durch einmalige Multiplikation mit x^n oder einem Linearfaktor auflösbar sind
- nicht: Betrachtung der Definitionsmenge, Überprüfung einer ermittelten Lösung

Beispiele

6.1 $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{2}{3}$

6.2 $\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{2}{x} = 3$

6.3 $2x - 7 = \dfrac{1}{x-3}$

6.4 $x^{-4} = 81$

7. Trigonometrische Gleichungen

- Bestimmung der Lösungen einfacher trigonometrischer Gleichungen in einem vorgegebenen Intervall
- nicht: allgemeine Angabe aller Lösungen

Beispiele

7.1 Bestimmen Sie die Lösungen im Bereich $0 \le x \le \pi$: $\sin(3x) = -1$

7.2 Bestimmen Sie die Lösungen im Bereich $0 \le x \le 2\pi$: $\cos(2x) = -0{,}8$ (mit WTR)

8. Betragsgleichungen

- Lösen einfacher Betragsgleichungen (nur ein Betrag) durch Fallunterscheidung (nur im Zusammenhang mit Abstandsberechnungen)

Beispiel

8.1 Für welche Werte von a hat der Punkt $S(6\,|\,6\,|\,6)$ den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene $E_a:\ 3x_2 + x_3 = a$?

9. Ungleichungen

- Lösen von Ungleichungen, die über die entsprechende Gleichung und anschließende funktionale Betrachtung gelöst werden können
- nicht: Auflösung einer Ungleichung durch Äquivalenzumformungen

Beispiele

9.1 $-x^2 + 3x + 7 > 3$

9.2 $(x+3)(x-1) > 0$

9.3 $(2x-1)\cdot e^{-2x} < 0$

(siehe auch 2.4 und 4.4)

10. Lineare Gleichungssysteme

- Lösung eines LGS (einfache Koeffizienten) mit Hilfe eines geeigneten Verfahrens
- nicht: Lösung eines LGS mit Parameter (bzw. Aussagen zu seiner Lösbarkeit)

Beispiele

10.1
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 &= -21 \end{aligned}$$

10.2 Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung und besitzt den Extrempunkt $E(1\,|\,1)$.

Bestimmen Sie eine zugehörige Funktionsgleichung.

Analysis A

Aufgabe 1

Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut eines Patienten durch den Graphen der Funktion f in Abbildung 1 (s. Anlage) beschrieben.
Dabei ist t die Zeit seit Verabreichung in Stunden und $f(t)$ die Wirkstoffmenge in mg.
Beantworten Sie die folgenden Fragen anhand des Graphen:
- Wie groß sind die Wirkstoffmenge und deren momentane Änderungsrate acht Stunden nach Verabreichung?
- In welchem Zeitraum beträgt die Wirkstoffmenge mindestens 35 mg?
- Wie groß ist die mittlere Wirkstoffmenge innerhalb der ersten vier Stunden?

(7 VP)

b) Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit

$$g(t) = 80 \cdot \left(1 - e^{-0,05 \cdot t}\right) \quad ; \qquad t \geq 0$$

(t in Minuten seit Infusionsbeginn, $g(t)$ in mg).

Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden?
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge ständig zunimmt.
Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge $1\,\frac{\text{mg}}{\text{min}}$?
Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge während der ersten vier Stunden.
Gegeben ist die Gleichung $g(t+15) = g(t) + 30$.
Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt.

(8 VP)

Aufgabe 2

Der Graph jeder Funktion g_a mit $g_a(x) = ax^2 + 6x + 1$ $(a \neq 0)$ ist eine Parabel C_a .

Zeigen Sie, dass sich alle C_a im Punkt $P(0|1)$ berühren.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve S , auf der die Scheitelpunkte aller C_a liegen.
Welcher Punkt auf S ist kein Scheitelpunkt einer Parabel C_a ? (5 VP)

Zu Aufgabe 1:

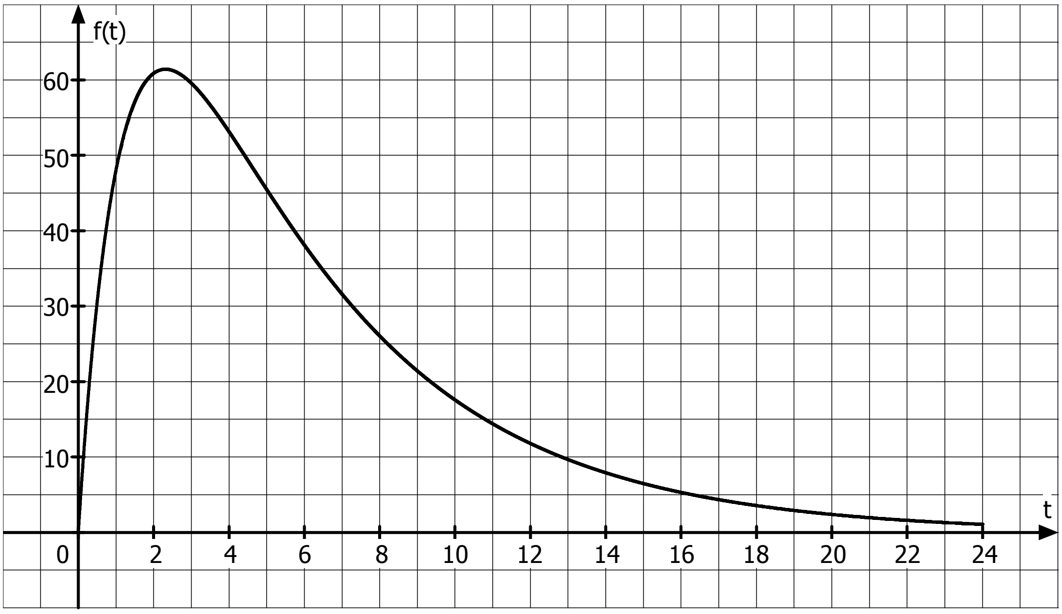
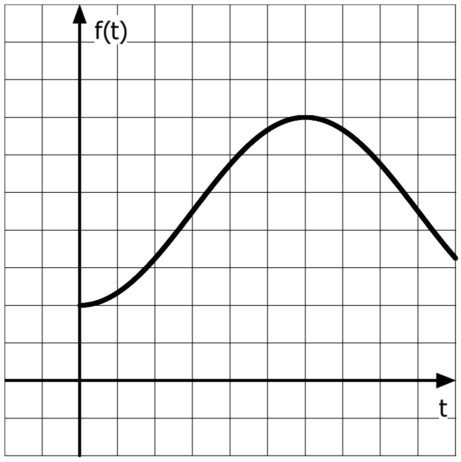


Abbildung 1

Analysis B

Aufgabe 1



Der Temperaturverlauf an einem Sommertag wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 18 - 10\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right), \quad 0 \leq t \leq 24$$

(t in Stunden nach Mitternacht, $f(t)$ in °C).
Abgebildet ist ein Teil des Graphen von f .

Ergänzen Sie in der Abbildung die Skalierungen der Koordinatenachsen.

Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur zwischen 6 Uhr und 18 Uhr. (5 VP)

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6 - 2e^{-x}$. Ihr Graph ist K .

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an.
Untersuchen Sie f auf Monotonie.
Skizzieren Sie K . (4 VP)

b) Die y-Achse, die Gerade $y = 6$ und K begrenzen eine nach rechts offene Fläche.
Berechnen Sie deren Inhalt. (4 VP)

c) Der Graph K^* entsteht durch Spiegelung von K an der Geraden $y = 1$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der zu K^* gehörenden Funktion f^*. (3 VP)

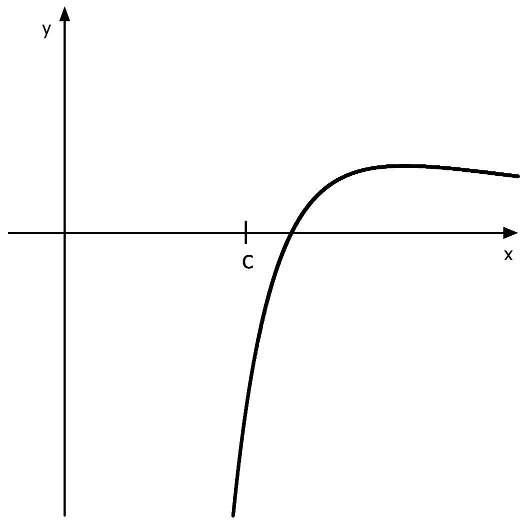
d) Eine Parabel zweiter Ordnung berührt den Graphen K im Punkt $S(0|4)$ und hat ihren Scheitel auf der Geraden $y = 3$.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel. (4 VP)

Analysis C

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{8}{x^2}-\frac{8}{x^3}$.

Ein Teil ihres Graphen K ist abgebildet.



a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge von f und Gleichungen der Asymptoten von K an.
K besitzt einen Schnittpunkt mit der x-Achse und einen Hochpunkt.
Bestimmen Sie deren Koordinaten.
Untersuchen Sie f für $x<0$ auf Monotonie. (5 VP)

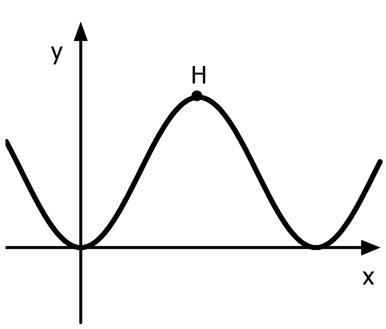
b) Die Tangente an K an der Stelle $x=2$ begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Wenn dieses Dreieck um die y-Achse rotiert, entsteht ein Körper. Berechnen Sie dessen Volumen. (4 VP)

c) Für die in der Abbildung eingetragene Stelle c wird die Integralfunktion I_c mit $I_c(x)=\int_c^x f(t)dt \quad (x \geq c)$ betrachtet.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass I_c mindestens zwei Nullstellen besitzt. (2 VP)

d) K begrenzt mit der x-Achse und der Geraden $x = u$ $(u > 1)$ eine Fläche.
Bestimmen Sie u so, dass diese Fläche den Inhalt 1 FE hat. (4 VP)

Aufgabe 2

Abgebildet ist ein Teil des Graphen der Funktion g mit $g(x)=(\sin(x))^2$.



Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes H .
Es gibt reelle Zahlen a, b, d, so dass gilt:

$$g(x)=a\cdot\cos(bx)+d$$

Bestimmen Sie diese Zahlen. (5 VP)

Analysis D

Aufgabe 1

Ein quaderförmiger Wassertank hat eine Grundfläche von $2\ m^2$ und ist zunächst leer. Der Graph in Abbildung 1 (s. Anlage) gibt die momentane Zuflussrate des Wassers in Kubikmeter pro Stunde über einen Zeitraum von sechs Stunden wieder.

Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate des Wassers.
Ermitteln Sie mithilfe des Graphen die Wassermenge im Tank nach 1,5 Stunden.
Geben Sie die maximale Wassermenge sowie die Wassermenge nach 6 Stunden an.
Wie hoch steht das Wasser im Tank zum Zeitpunkt des stärksten Zuflusses?
Skizzieren Sie unter Verwendung dieser Ergebnisse den Graphen, der die Höhe des Wasserspiegels in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, in Abbildung 2 (s. Anlage).

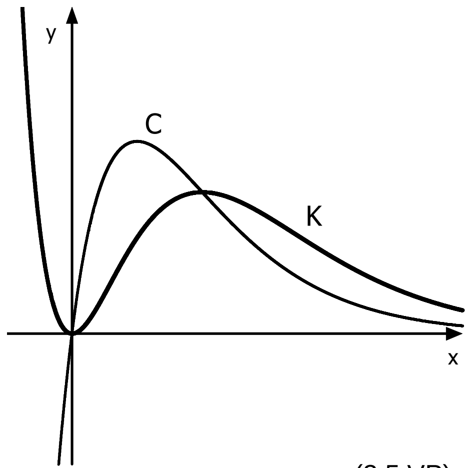
(7 VP)

Aufgabe 2

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g durch

$$f(x) = 8x \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad g(x) = 4x^2 \cdot e^{-x} .$$

Deren Graphen sind in der nebenstehenden Skizze dargestellt.



a) Begründen Sie, dass C der Graph von f und K der Graph von g ist.
Berechnen Sie die Schnittpunkte von C und K. (3,5 VP)

b) Die Gerade $x = 1$ schneidet K in P und C in Q.
P, Q und der Ursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. (2,5 VP)

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts von K.
Geben Sie ohne weitere Rechnung an, für welche Werte von a die Gleichung $g(x) = a$ keine, eine bzw. mehrere Lösungen hat. (5 VP)

d) Es gibt Stammfunktionen F von f und G von g, sodass $F(x) - G(x) = g(x)$ gilt.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von C und K eingeschlossen wird. (2 VP)

Zu Aufgabe 1:

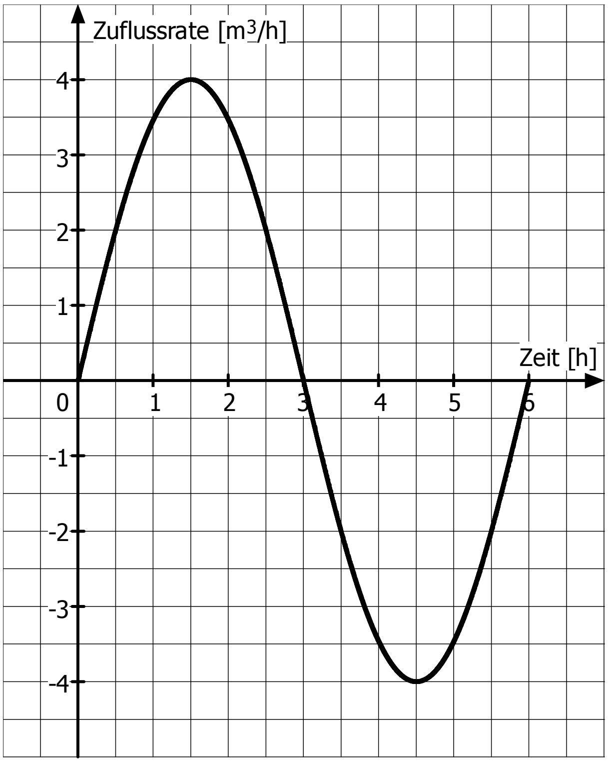


Abbildung 1

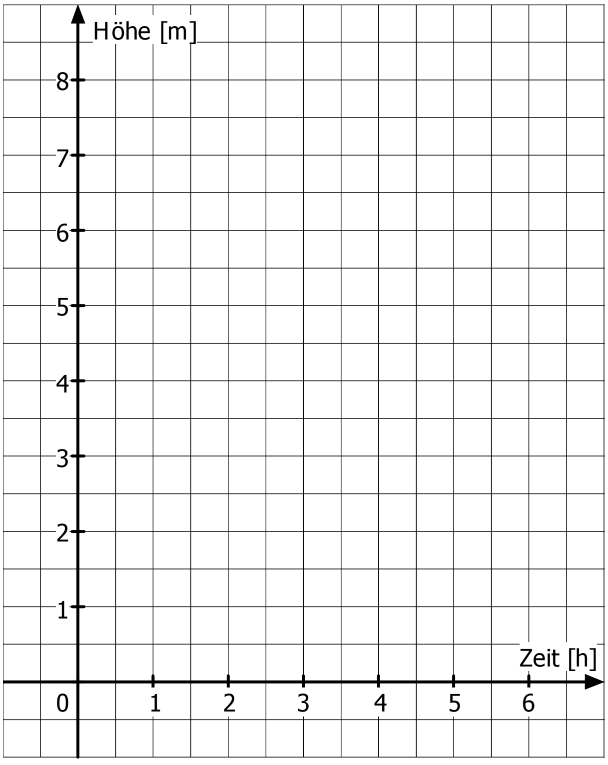


Abbildung 2

Stochastik A

Ein Glücksrad besteht aus drei farbigen Sektoren mit den Mittelpunktswinkeln 180° (rot), 90° (gelb) und 90° (blau).

a) Das Glücksrad wird zehn Mal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Die Farbe Blau tritt genau vier Mal auf.
B: Die Farbe Blau tritt mindestens vier Mal auf. (2 VP)

b) Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen? (2 VP)

Eine Klasse setzt dieses Glücksrad beim Schulfest ein, wobei folgende Spielregeln gelten: Für einen Einsatz von einem Euro darf ein Spieler das Glücksrad drei Mal drehen. Wenn drei Mal dieselbe Farbe erscheint, erhält er zwei Euro zurück; wenn drei verschiedene Farben erscheinen, bekommt er nichts ausbezahlt; in allen anderen Fällen erhält er seinen Einsatz zurück.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht ein Spieler Verlust, wenn er dieses Spiel einmal spielt? (1,5 VP)

d) Die Klasse will im nächsten Jahr zwar die Spielregeln beibehalten, aber durch Veränderung der Sektorengrößen ihre Gewinnwahrscheinlichkeit erhöhen. Dabei soll der rote Sektor weiterhin doppelt so groß sein wie der gelbe. Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Drehung „gelb“ erscheint. Für welchen Wert von p ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler Verlust macht, am größten? (4,5 VP)

Stochastik B

Bei einem Schulfest gibt es verschiedene Attraktionen.

a) Auf einem Tisch liegen verdeckt fünf Spielkarten, unter denen sich zwei Joker befinden. Hilde und Franz decken abwechselnd je eine Karte auf. Es gewinnt, wer zuerst einen Joker zieht. Hilde beginnt das Spiel.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Franz gewinnt.
B: Hilde gewinnt. (2 VP)

b) Bei einem Glücksrad der Klasse 5a gewinnt man ein Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}25$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 50 Spielen mindestens zehn Mal gewinnt?
Beim Glücksrad der Klasse 5b beträgt die Wahrscheinlichkeit, bei 50 Spielen mindestens zehn Mal zu gewinnen, 99%.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn in einem Spiel auf zwei Dezimalen genau. (4 VP)

c) Bei einem Spielautomaten erscheint auf Knopfdruck ein Bildsymbol: entweder eine Sonne oder ein Mond. Für einen Einsatz von einem Euro darf man zwei Mal nacheinander drücken. Erscheint zwei Mal die Sonne, so erhält man zwei Euro ausbezahlt; erscheint zwei Mal der Mond, so erhält man einen Euro ausbezahlt; in den anderen Fällen erhält man nichts ausbezahlt.
Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für Sonne sein, damit das Spiel fair ist? (4 VP)

Stochastik C

Ein Hotel hat 150 Zimmer. Für sein beliebtes Wochenendangebot liegen immer deutlich mehr als 150 Anfragen für Reservierungen vor. Da die Hotelleitung im vergangenen Jahr die Erfahrung gemacht hat, dass im Mittel nur 90% der Reservierungen in Anspruch genommen werden, entschließt sie sich nun, immer 160 Reservierungen anzunehmen. Die Anzahl der Reservierungen, die tatsächlich in Anspruch genommen werden, wird durch eine Zufallsvariable X beschrieben. Diese wird als binomialverteilt angenommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
   E_1: Genau 150 Reservierungen werden in Anspruch genommen.
   E_2: Es müssen Gäste, die reserviert haben, abgewiesen werden.
   E_3: Alle Gäste, die ihre Reservierung in Anspruch nehmen wollen, bekommen ihr Zimmer.

(3 VP)

b) Falls Gäste, die reserviert haben, wegen Überbuchung kein Zimmer bekommen, müssen sie auf Kosten des Hotels in einem teureren Hotel in der Nähe untergebracht werden. Die Hotelleitung will daher erreichen, dass die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall unter 1% liegt.
Wie viele Reservierungen darf sie dann höchstens annehmen? (2 VP)

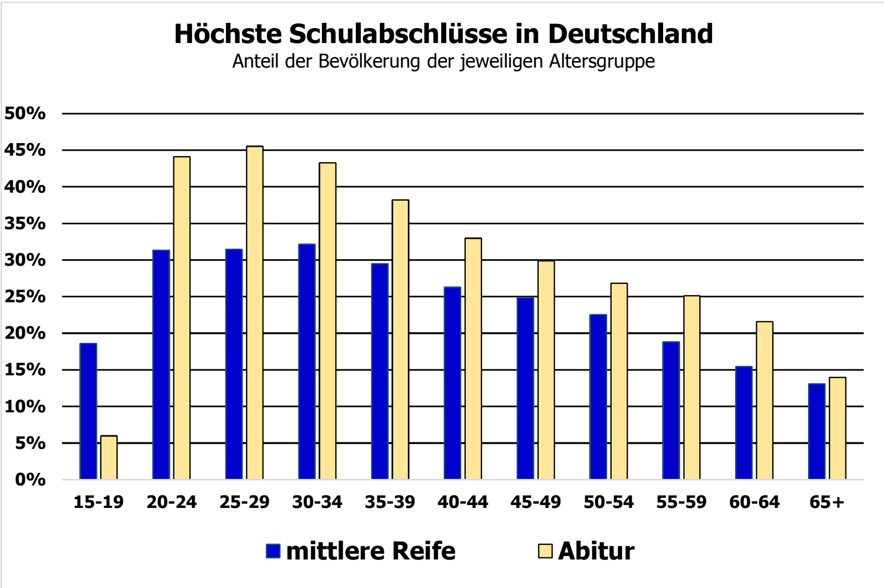
Die Hotelleitung überlegt, ob sie das Hotel mit einer Sauna ausstatten soll. Das Vorhaben soll aber nur dann umgesetzt werden, wenn mindestens 20% der Gäste dieses kostenpflichtige Angebot auch nutzen würden.
Die Nullhypothese H_0: *„Höchstens 20% der Gäste würden die Sauna nutzen.“*
soll auf der Basis einer Umfrage bei 300 Gästen auf einem Siginifikanzniveau von 5 % getestet werden.

c) Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (3 VP)

d) Vor der Konzeption des Tests stellte die Hotelleitung folgende Überlegungen an:
   I: Wenn die Sauna nicht gebaut wird, obwohl sie mindestens 20% der Gäste nutzen würden, entgehen dem Hotel zusätzliche Einnahmen.
   II: Wenn die Sauna gebaut wird, obwohl sie höchstens 20% der Gäste nutzen, entstehen dem Hotel finanzielle Verluste.
   Für einen dieser beiden Fälle kann die Wahrscheinlichkeit des Eintretens mit obigem Test auf 5% begrenzt werden.
   Entscheiden Sie, welcher der beiden Fälle dies ist.
   Begründen Sie Ihre Entscheidung. (2 VP)

Stochastik D

Das folgende Diagramm zeigt Daten des statistischen Bundesamts zum jeweils höchsten erreichten Schulabschluss in verschiedenen Altersgruppen (Stand 2012):



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte 20-24-jährige Person kein Abitur hat.
Eine andere Statistik gibt an, dass 2012 die Anzahl der Personen mit mittlerer Reife im Alter von 45 bis 49 Jahren größer war als die entsprechende Anzahl bei den 35-39-jährigen Personen.
Untersuchen Sie, ob diese Aussage mit den obigen Daten vereinbar ist. (2,5 VP)

b) Zwanzig Personen im Alter von 55 bis 59 Jahren werden zufällig ausgewählt.
Begründen Sie, dass die Anzahl der Personen mit Abitur in dieser Gruppe mit einer binomialverteilten Zufallsvariablen beschrieben werden kann.
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: In dieser Gruppe haben genau sechs Personen Abitur.
B: In dieser Gruppe haben höchstens vier Personen Abitur. (3,5 VP)

c) Zwölf Personen nehmen an einem Abitur-Fernkurs teil. Zehn von ihnen haben bereits die mittlere Reife. Bei jedem von ihnen liegt die Erfolgschance bei 80%.
Bei den beiden anderen beträgt die Erfolgschance jeweils nur 60%.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
C: Alle zehn Personen mit mittlerer Reife sind erfolgreich.
D: Mindestens elf Personen schließen den Fernkurs erfolgreich ab. (4 VP)